KLAUSUR

Lineare Algebra (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

01.03.2011

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 18 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = -1+i$ und $z_2 = \frac{\sqrt{15}}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2}$.

   (i) Schreiben Sie z_1 und z_2 in Polardarstellung (Rechnen Sie in Grad. Stellen Sie dazu Ihren Taschenrechner auf DEG ein, **nicht** RAD).

   (ii) Bestimmen Sie $w = z_1^8 z_2^6$ und schreiben Sie das Ergebnis in der Form $w = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

   (iii) Wie lauten die Lösungen der Gleichung $z^2 - 6iz = z_1 + 9$?

   (b) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erfüllen folgende Gleichungen,

   $$(1) \qquad (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = -15$$

   $$(2) \qquad ||\vec{a}||\;||\vec{b}|| - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 2\sqrt{3}$$

   wobei 1 die Länge des Vektors $\vec{a}$ sei (d. h. $||\vec{a}|| = 1$).
   Berechnen Sie die Länge von $\vec{b}$, das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sowie den von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel α (wiederum in Grad).

2. (a) Die drei Punkte $A = (2, a, 24)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (-1, 1, -2)$ spannen im $\mathbb{R}^3$ ein Dreieck auf.
   Wie muss man a wählen, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ABC genauso groß wird, wie der Flächeninhalt des Quadrats über der Seite BC?

   (b) Gegeben seien die Ebenen

   $$E_1 : 3x - y - z = 0, \; E_2 : -x + y - z = -1 \text{ und } E_3 : -6x + 2y + 2z = 0.$$

   Bestimmen Sie die Schnittmenge der drei Ebenen und geben Sie eine Parameterdarstellung davon an.

Bitte wenden!

3. Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie

(a) das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte von A.

(b) die Eigenvektoren von A.

(c) eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix D ist. Geben Sie auch D an.

4. (a) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten x, y und z

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & a-2 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a und b seien beliebige reelle Zahlen).
Unter welcher Bedingung ist das System

(i) nicht lösbar?

(ii) eindeutig lösbar?

(iii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?

(b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wird durch die folgende Matrix A von f bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ (d. h. die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) gegeben:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns sowie eine Basis des Bildes von f, und bestätigen Sie die Dimensionsformel.

Lösungen

1a (i)

$$z_1 = -1+i\ ; \quad |z_1| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi_1 = 2\arctan\left(\frac{1}{-1+\sqrt{2}}\right) = 135^\circ$$

$$\Longrightarrow z_1 = \sqrt{2}e^{135^\circ i}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{15}}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2}\ ; \quad |z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{5},$$

$$\varphi_2 = 2\arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}+\sqrt{5}}\right) = -30^\circ \Longrightarrow z_2 = \sqrt{5}e^{-30^\circ i}$$

1a (ii)

$$w = z_1^8 z_2^6 = \left(\sqrt{2}e^{135^\circ i}\right)^8 \left(\sqrt{5}e^{-30^\circ i}\right)^6 = (\sqrt{2})^8 e^{135^\circ i\cdot 8}(\sqrt{5})^6 e^{-30^\circ i\cdot 6} = 16\cdot 1\cdot 125\cdot(-1) = -2000$$

1a (iii)

Lösungen der Gleichung $z^2 - 6iz = z_1 + 9$

$$z^2 - 6iz = z_1+9 \Longleftrightarrow (z-3i)^2-(-3i)^2 = z_1+9 \Longleftrightarrow (z-3i)^2+9 = z_1+9 \Longleftrightarrow (z-3i)^2 = z_1$$

$$\Longleftrightarrow (z-3i)^2 = \sqrt{2}e^{135^\circ i} \Longleftrightarrow z - 3i = \pm\left(\sqrt{2}e^{135^\circ i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow z = 3i + 2^{\frac{1}{4}}e^{67.5^\circ i} \quad \text{oder} \quad z = 3i - 2^{\frac{1}{4}}e^{67.5^\circ i}$$

1b

$$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b}) = -15 \Longleftrightarrow ||\vec{a}||^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{a}-4||\vec{b}||^2 = -15 \Longleftrightarrow ||\vec{a}||^2-4||\vec{b}||^2 = -15$$

$$\Longleftrightarrow 1^2 - 4||\vec{b}||^2 = -15 \Longleftrightarrow -4||\vec{b}||^2 = -16 \Longleftrightarrow ||\vec{b}|| = 2$$

$$||\vec{a}||\ ||\vec{b}|| - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 2+2\sqrt{3} \Longleftrightarrow 1\cdot 2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 2+2\sqrt{3} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = -\sqrt{3}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||\cdot||\vec{b}||} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 150^\circ$$

2a

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC bzw. des Quadrats über der Seite BC ist durch die Formel $F_{ABC} = \frac{1}{2}||\vec{AB} \times \vec{AC}||$ bzw. $F_{BC} = ||\vec{BC}||^2$ gegeben.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-a \\ -22 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1-a \\ -26 \end{pmatrix},$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$F_{ABC} = \frac{1}{2}||\vec{AB}\times\vec{AC}|| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} -26(1-a)+22(1-a) \\ (-22)(-3)-26 \\ -1(1-a)+3(1-a) \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} -4(1-a) \\ 40 \\ 2(1-a) \end{pmatrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-4(1-a))^2 + 40^2 + (2(1-a))^2} = \sqrt{5(1-a)^2 + 400}\,.$$

$$F_{BC} = ||\vec{BC}||^2 = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-4)^2} = 20\,.$$

$$F_{ABC} = F_{BC} \iff \sqrt{5(1-a)^2+400} = 20 \iff 5(1-a)^2 + 400 = 400$$

$$\iff 5(1-a)^2 = 0 \Longrightarrow a = 1\,.$$

2b

Die Schnittmenge der Ebenen

$$E_1 : 3x - y - z = 0,\ E_2 : -x + y - z = -1 \text{ und } E_3 : -6x + 2y + 2z = 0.$$

ist durch das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - y - z &= 0 \\ -x + y - z &= -1 \\ -6x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

gegeben. Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = (1) + 3(2) \\ (3') = 2(1) + (3) \end{array}$$

Man stellt fest, dass das GS unterbestimmt ist. Man setze $z = \lambda$.

$(2') \rightsquigarrow 2y - 4\lambda = -3 \Longrightarrow y = 2\lambda - \dfrac{3}{2} \quad (1') \rightsquigarrow -3x - (2\lambda - \dfrac{3}{2}) - \lambda = 0 \Longrightarrow x = \lambda - \dfrac{1}{2}$.

Die gesuchte Schnittmenge ist die Gerade mit der folgenden Parameterdarstellung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{2} \\ 2\lambda - \frac{3}{2} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

3

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3a

Charakteristisches Polynom von A.

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(-1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2) .$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\mathcal{X}_A(\lambda)$. D.h. $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$.

3b

Eigenvektoren von A.

Die Eigenvektoren von A sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems $(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0}$ für $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$.

Für $\lambda_1 = -1$

$$(A - \lambda_1 E)\vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow (A + E)\vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus hat man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = 2(1) + (2) \\ (3') \end{array}$$

Man kann schon wieder feststellen, dass das Gleichungssystem unterbestimmt ist. Man setze $z = \mu$ und $y = \gamma$.

$$(1') \rightsquigarrow -x - 2\gamma + \mu = 0 \Longrightarrow x = -2\gamma + \mu \, .$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\gamma + \mu \\ \gamma \\ \mu \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass man für den Eigenwert $\lambda = -1$ die l.u. Eigenvektoren $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält .

Genauso erhält man für den Eigenwert $\lambda = 2$ den Eigenvektor $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3c

Eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist, wird spaltenweise gebildet aus den Eigenvektoren. Die entsprechende Diagonalmatrix D enthält die Eigenwerte in der Diagonalen.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \, .$$

4a

Gleichungssystem für die Unbekannten x, y und z

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & a-2 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a und b seien beliebige reelle Zahlen).
Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1)+(2) \\ (3') = (1)+(3) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 0 & a(a-7) & b(a+6) \end{array}\right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -3(2') + (-3+a)(3') \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist

(i) nicht lösbar, wenn
$a(a-7) = 0$ und $b(a+6) \neq 0$. D.h. wenn ($a = 0$ oder $a = 7$) und $b \neq 0$.

(ii) eindeutig lösbar, wenn
$a(a-7) \neq 0$ D.h. wenn $a \neq 0$ und $a \neq 7$.

(iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn
$a(a-7) = 0$ und $b(a+6) = 0$ D.h. wenn ($a = 0$ oder $a = 7$) und $b = 0$.

4b

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wird durch die folgende Matrix A (mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung einer Basis des Kerns von f.
$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Kern}(f) \Longleftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = 2(1)+(2) \end{array}$$

Man $z = \mu$ und $y = \gamma$. $(1') \rightsquigarrow -x + 2\gamma + \mu \Longrightarrow x = 2\gamma + \mu$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma + \mu \\ \gamma \\ \mu \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass eine Basis des Kerns von f ist

$$B_1 = \left\{ \vec{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} , \quad \text{Dim (Kern } (f)) = 2$$

Bestimmung einer Basis des Bildes von f.
Die lineare unabhängigen Spalten von A bilden eine Basis des Bildes von f. Mit Spaltenumformungen erhält man

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (S_2'(\text{2. Spalte})) = 2(S_1) + (S_2) \\ (S_3') = (S_1) + (S_3) \end{array}$$

Daraus folgt, dass eine Basis des Bildes von f ist

$$B_2 = \left\{ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} , \quad \text{Dim (Bild } (f)) = 1$$

Bestätigung der Dimensionsformel.

$$\begin{aligned} \text{Dim}(\mathbb{R}^3) &= \text{Dim(Kern } (f)) + \text{Dim(Bild } (f)) \Longleftrightarrow \\ 3 &= 2 + 1 \end{aligned}$$