Klausur zur Linearen Algebra

(E-Tech / Mechatronik / INF)

vom 01.09.2016

Klausur und Lösungsskizze

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie (außer bei Aufg. 3(d)) alle Rechenschritte an!

Aufgabe 1.

a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie $x := \frac{(a-2ai)(3-i)}{4-3i}$ in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten an.

b) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $X^3 = i$ in Polarkoordinaten.

c) Gegeben sei die Ebene

$$E : \vec{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E und den Abstand des Punktes $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von E.

d) Entscheiden Sie, ob die Gerade

$$G : \vec{x} = P + r \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})$$

die Ebene E schneidet oder nicht.

Aufgabe 2.
Sei $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dann ist $\mathscr{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Wir bezeichnen mit $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

a) Berechnen Sie die Übergangsmatrizen $M_{\mathscr{B},\mathscr{E}}$ und $M_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$ zu den entsprechenden Basiswechseln.

b) Für die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

berechne man die darstellende Matrix $M_{\mathscr{E}}(f)$ bez. $\mathscr{E}$ und die darstellende Matrix $M_{\mathscr{B}}(f)$ bez. $\mathscr{B}$.

c) Konstruieren Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus $\mathscr{B}$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^2$.

d) Finden Sie die orthogonale Projektion von $Q := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf die Gerade $G = \mathrm{Span}(\vec{b}_1)$ (d.h. den Lotfußpunkt des Lotes von Q auf G).

Bitte wenden!

Aufgabe 3.
Wir betrachten für $c \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ c & c & 1-c \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit dem Gauß-Algorithmus den Rang $\mathrm{rg}(A_c)$ und die Determinante $\det(A_c)$ (in Abhängigkeit von c).

b) Für welche Werte von c ist das LGS $A_c \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lösbar / unlösbar?

c) Wir betrachten nun den Fall $c = 0$. Berechnen Sie die Inverse A_0^{-1} von A_0.

d) Man entscheide ohne Begründung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) Wenn $\widetilde{A}_0$ die Matrix ist, die aus A_0 durch Vertauschen der ersten beiden Zeilen entsteht, dann gilt $\det(\widetilde{A}_0) = \det(A_0)$.

(ii) Es gibt eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ vom Rang $\mathrm{rg}(C) = 5$ mit $\dim(\mathbb{L}(C)) = 7$. ($\mathbb{L}(C)$ steht dabei für den Lösungsraum des homogenen LGS $C\vec{x} = \vec{0}$.)

Aufgabe 4. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A. (Zur Kontrolle: 0 ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms).

b) Berechnen Sie (falls möglich) eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ derart, dass $S^{-1}AS = D$ gilt.

c) Was ist die Determinante von A?

Lösungsskizze

Aufgabe 1.

a) Nach Erweitern mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl ergibt sich

$$x = \frac{a(1-2i)(3-i)(4+3i)}{25} = \frac{a(1-7i)(4+3i)}{25} = a\frac{25-25i}{25} = a - ai.$$

Es gilt $|x| = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$. Elementargeometrisch oder mit den entsprechenden Formeln sieht man leicht, dass $\arg(x) = \frac{3}{2}\pi$. Also ist $x = a\sqrt{2}\exp(\frac{3}{2}\pi i)$ die Darstellung von x in Polarkoordinaten.

b) Offenbar gilt $i = \exp(\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\varphi} i)$. Die Lösungen von $X^3 = i$ sind also die drei komplexen Zahlen x_1, x_2 und x_3, die durch

$$x_k = \exp((\frac{\varphi}{3} + k\frac{2\pi}{3})i) = \exp((\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3})i) \quad (k \in \{0,1,2\})$$

gegeben sind. Daher gilt $x_0 = \exp(\frac{\pi}{6}i)$, $x_1 = \exp(\frac{5\pi}{6}i)$ und $x_2 = \exp(\frac{9\pi}{6}i)$.

c) Ein Normalenvektor von E ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ein Einheitsnormalenvektor von E ist durch

$$\vec{n}^\circ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. (Man kann auch konsequent mit $-\vec{n}^\circ$ arbeiten.) Wg $\vec{0} \in E$ ist die HNF von E durch $E : \vec{n}^\circ \cdot \vec{x} = 0$, d.h. durch

$$E : \underbrace{\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3}_{=:f(\vec{x})} = 0$$

gegeben. Der gesuchte Abstand ist

$$d(P,E) = |f(P)| = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

d) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}^\circ = 0.$$

Also steht der Richtungsvektor von G auf den Normalenvektor von E senkrecht. Daher ist G parallel zu E, und wegen $P \notin E$ (vgl. (c)) folgt daraus: E und G schneiden sich nicht.

Aufgabe 2. Sei $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sei $B = (\vec{b}_1|\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Nach wohlbekannten Formeln ist $M_{\mathscr{B},\mathscr{E}} = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $M_{\mathscr{E},\mathscr{B}} = B^{-1} = \det(B)^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Betrachte die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Es gilt also $M_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Mit wohlbekannten Formeln für den Basiswechsel folgt

$$M_{\mathscr{B}}(f) = B^{-1} M_{\mathscr{E}}(f) B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Wir konstruieren mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus $\mathscr{B}$ eine ON-Basis $\mathscr{C} = (\vec{c}_1|\vec{c}_2)$ des $\mathbb{R}^2$: Setze $\vec{b}'_1 := \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{b}'_2 = \vec{b}_2 - \frac{\langle \vec{b}_2, \vec{b}'_1 \rangle}{\langle \vec{b}'_1, \vec{b}'_1 \rangle} \vec{b}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (b'_1, b'_2) eine OG-Basis des $\mathbb{R}^2$. Wir müssen noch die Vektoren auf Länge 1 normieren: Mit $\vec{c}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $\mathscr{C} = (\vec{c}_1|\vec{c}_2)$ die gesuchte ON-Basis des $\mathbb{R}^2$.

d) Wir berechnen nun die orthogonale Projektion L von $Q := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf die Gerade $G = \mathrm{Span}(\vec{b}_1)$. Die Koordinatendarstellung von Q bez. $\mathscr{C}$ ist durch

$$Q = \langle Q, \vec{c}_1 \rangle \vec{c}_1 + \langle Q, \vec{c}_2 \rangle \vec{c}_2 = \frac{8}{\sqrt{2}} \vec{c}_1 + ? \vec{c}_2$$

gegeben. (Der exakte Wert von ? ist für unsere Zwecke belanglos.) Da $\vec{c}_1$ Richtungsvektor von G ist, muss

$$L = \frac{8}{\sqrt{2}} \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gelten.

Es gibt (viele) andere Möglichkeiten, Teil d) zu lösen.

Aufgabe 3. Wir betrachen für $c \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ c & c & 1-c \end{pmatrix}.$$

a) Im folgenden steht $\rightsquigarrow$ für einen Gauss-Schritt.

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ c & c & 1-c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-3c \end{pmatrix} =: B_c,$$

und B_c ist in Stufenform. Es folgt

$$\mathrm{rg}(A_c) = \mathrm{rg}(B_c) = \begin{cases} 2 & \text{falls } c = \frac{1}{3} \\ 3 & \text{falls } c \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

und $\det(A_c) = \det(B_c) = 1 \cdot (-1) \cdot (1-3c) = -1+3c$.

b) Wir rechnen mit den erweiterten Matrizen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ c & c & 1-c & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-3c & -c \end{array}\right).$$

Das Gleichungssystem ist unlösbar genau dann, wenn die unterste Zeile von der Form $(0,0,0| \neq 0)$ ist, d.h. genau dann, wenn $c = \frac{1}{3}$.

c) Wir rechnen mit der erweiterten Matrix $(A_0|E)$.

$$\begin{array}{cl} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Rechts unten kann man A_0^{-1} nun ablesen!

d) In beiden Fällen ist die Antwort "nein".

Aufgabe 4. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} P_A(T) &= \det \begin{pmatrix} 1-T & 4 & 1 \\ 0 & 3-T & 0 \\ 1 & 2 & 1-T \end{pmatrix} = \\ &= (3-T) \det \begin{pmatrix} 1-T & 1 \\ 1 & 1-T \end{pmatrix} = \\ &= -(T-3)((1-T)^2 - 1) = \\ &= -(T-3)(1-2T+T^2-1) = -T(T-3)(T-2). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte (=Nullstellen von $P_A(T)$) sind: 0, 2 und 3.

b) (A priori ist klar, dass A diagonalisierbar ist, weil die Eigenwerte alle alg. Vielfachheit Eins haben.) Wir berechnen die Eigenräume.

(i) Eigenraum zum Eigenwert 0:

$$\begin{aligned}\mathrm{Eig}(A,0) &= \mathbb{L}(A) = \mathbb{L}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{L}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(ii) Eigenraum zum Eigenwert 2:

$$\begin{aligned}\mathrm{Eig}(A,2) &= \mathbb{L}(A-2E) = \mathbb{L}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{L}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{L}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(iii) Eigenraum zum Eigenwert 3:

$$\begin{aligned}\mathrm{Eig}(A,3) &= \mathbb{L}(A-3E) = \mathbb{L}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathbb{L}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ gilt also $S^{-1}AS = D$.

c) Offenbar gilt $\det(A) = P_A(0) = 0$.