# KLAUSUR

Lineare Algebra (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

01.09.2011

(W. Koepf)

| Name: | Vorname: | Matr.–Nr./Studiengang: | Versuch–Nr.: |
|---|---|---|---|
| | | | |

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 18 Punkte erreicht werden.

| 1) | 2) | 3) | 4) |
|---|---|---|---|
| | | | |

| Punkte: | Note: |
|---|---|
| | |

**Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.**
**Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.**
**Geben Sie alle Rechenschritte an!**

1. (a) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$ und $z_2 = -1 - i$.

   (i) Schreiben Sie $z_1$ und $z_2$ in Polardarstellung (Rechnen Sie in Grad. Stellen Sie dazu Ihren Taschenrechner auf DEG ein, **nicht** RAD).

   (ii) Bestimmen Sie $w = z_1^6 z_2^8$ und schreiben Sie das Ergebnis in der Form $w = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

   (iii) Wie lauten die Lösungen der Gleichung $z^2 + 4iz = z_2 + 4$ (mit $z_2$ wie oben)?

   (b) Durch die Gleichung

   $$-2x + 3y - z + 1 = 0$$

   wird eine Ebene $E$ gegeben. Durch die Punkte $A = (1, 2, 3)$ und $B = (3, 3, 2)$ geht eine Gerade $g_1$. Sei $g_2$, die Gerade deren Parameterdarstellung

   $$g_2: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$$

   ist.

   (i) Man gebe eine Parameterdarstellung der Ebene $E$.

   (ii) Man bestimme den Abstand zwischen $g_1$ und $g_2$.

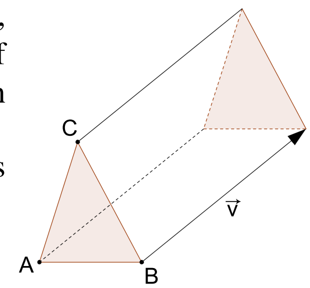
2. (a) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erfüllen folgende Gleichungen,

   (1) $$(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = -17$$

   (2) $$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 7$$

   wobei 2 die Länge des Vektors $\vec{a}$ sei (d. h. $||\vec{a}|| = 2$).
   Berechnen Sie die Länge von $\vec{b}$, das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sowie den von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel $\alpha$ (wiederum in Grad).

(b) Die drei Punkte $A = (1, 1, 2)$, $B = (-1, 1, -2)$, $C = (2, c, 24)$ spannen im $\mathbb{R}^3$ ein Dreieck auf ($c \in \mathbb{R}$). Verschiebt man dieses Dreieck durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-c^2 \\ 0 \\ 1+c \end{pmatrix}$, so überstreicht es ein Prisma im Raum.




(i) Wie groß ist das Volumen $V$ dieses Prismas?

(ii) Bestimmen Sie $c$ so, dass $V = 0$ wird. Was bedeutet dies geometrisch für die Vektoren $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ und $\vec{v}$?

3. Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie

(a) das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte von $A$.

(b) die Eigenvektoren von $A$.

(c) eine Matrix $B$, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix $D$ ist. Geben Sie auch $D$ an.

4. (a) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten $x$, $y$ und $z$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -\alpha \\ 3 & -2 & 2 \\ -\alpha & 2 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

($\alpha$ und $\beta$ seien beliebige reelle Zahlen).
Unter welcher Bedingung ist das System

(i) nicht lösbar?

(ii) eindeutig lösbar?

(iii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?

(b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ wird durch die folgende Matrix $A$ von $f$ bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ (d. h. die Matrix $A$ mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns sowie eine Basis des Bildes von $f$, und bestätigen Sie die Dimensionsformel.

**Lösungen**
**1a (i)**

$$z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{6} \quad |z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}, \quad \varphi_1 = 2\arctan\left(\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}\right) = -60^\circ$$

$$\Longrightarrow z_1 = 2\sqrt{2}e^{-60^\circ i} = 2\sqrt{2}e^{300^\circ i}$$

$$z_2 = -1 - i\ ; \quad |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi_2 = 2\arctan\left(\frac{-1}{-1+\sqrt{2}}\right) = -135^\circ \Longrightarrow z_2 = \sqrt{2}e^{-135^\circ i} = \sqrt{2}e^{225^\circ i}$$

**1a (ii)**

$$w = z_1^6 z_2^8 = \left(2\sqrt{2}e^{300^\circ i}\right)^6 \left(\sqrt{2}e^{225^\circ i}\right)^8 = \left(2^6 2^3 e^{300^\circ i \cdot 6}\right)\left(2^4 e^{225^\circ i \cdot 8}\right) = 2^{13}e^{i3600^\circ} = 8192 + 0i\ .$$

**1a (iii)** Lösungen der Gleichung $z^2 + 4iz = z_2 + 4$

$$z^2 + 4iz = z_2 + 4 \Longleftrightarrow (z+2i)^2 - (2i)^2 = z_2 + 4 \Longleftrightarrow (z+2i)^2 + 4 = z_2 + 4 \Longleftrightarrow (z+2i)^2 = z_2$$

$$\Longleftrightarrow (z+2i)^2 = \sqrt{2}e^{225^\circ i} \Longleftrightarrow z + 2i = \pm\left(\sqrt{2}e^{225^\circ i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow z = 2i + 2^{\frac{1}{4}}e^{112.5^\circ i} \quad \text{oder} \quad z = 2i - 2^{\frac{1}{4}}e^{112.5^\circ i}$$

**1b**

(i) Parameterdarstellung der Ebene $E$ der Gleichung: $-2x + 3y - z + 1 = 0$.
Man setze $z = \mu$, $y = \lambda$ und erhalte $-2x + 3\lambda - \mu + 1 = 0$, d.h. $x = \frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}$, somit erhalten wir

$$E: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

(ii) Abstand zwischen $g_1$ und $g_2$.
Sei $d(g_1, g_2)$

$$d(g_1, g_2) = \frac{|(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \cdot (\vec{a_1} \times \vec{a_2})|}{||(\vec{a_1} \times \vec{a_2})||}\ , \quad \text{wobei}$$

$$\vec{r_1} = 0\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a_1} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{a_1} \times \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-3) - (-1)\cdot 1 \\ 3\cdot(-1) - 2\cdot(-3) \\ 2\cdot 1 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{r_2} - \vec{r_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$d(g_1, g_2) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2\cdot(-3) + (-1)\cdot(-1)|}{4+9+1} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

**2a**

$$(\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = -17 \Longleftrightarrow ||\vec{a}||^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{a} - 2||\vec{b}||^2 = -17 \Longleftrightarrow -\vec{a}\cdot\vec{b} - 2||\vec{b}||^2 = -21 \qquad (1)$$

$$(\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = 7 \Longleftrightarrow ||\vec{a}||^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + ||\vec{b}||^2 = 3 \Longleftrightarrow -2\vec{a}\cdot\vec{b} + ||\vec{b}||^2 = 3 \qquad (2)$$

(1) and (2) $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b} + 2||\vec{b}||^2 = 21 \\ -2\vec{a}\cdot\vec{b} + ||\vec{b}||^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 3 \quad \text{und} \quad ||\vec{b}|| = 3 \Longrightarrow \cos(\alpha) = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||||\vec{b}||} = \frac{3}{2.3} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = 60^\circ.$$

**2b**

$A = (1,1,2)$, $B = (-1,1,-2)$, $C = (2,c,24)$ spannen im $\mathbb{R}^3$ ein Dreieck auf ($c \in \mathbb{R}$). Verschiebt man dieses Dreieck durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-c^2 \\ 0 \\ 1+c \end{pmatrix}$, so überstreicht es ein Prisma im Raum.

(i) Volume des Prismas:

$$V = \frac{1}{2}\left|(\vec{AB} \times \vec{AC})\cdot\vec{v}\right|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ c-1 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(c-1) \\ -44 \\ -2(c-1) \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 4(c-1) \\ -44 \\ -2(c-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-c^2 \\ 0 \\ 1+c \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \big( 4(c-1)(1-c^2) - 2(c-1)(c+1) \big) \ .$$

$$\Longrightarrow V = (c-1)(c+1)(-2c+1) \ .$$

(ii) Bestimmen Sie $c$ so, dass $V = 0$ ist.

$$V = 0 \Longleftrightarrow c = 1 \quad \text{oder} \quad c = -1 \quad \text{oder} \quad c = \frac{1}{2} \ .$$

Geometrische Bedeutung von $V = 0$: Die Vektoren $\vec{AB}, \vec{AC}$ und $\vec{v}$ sind coplanar (d.h. liegen auf der gleichen Ebene).

**3**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

**3a** Charakteristisches Polynom von $A$ .

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -6 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ 3 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2 \ .$$

Die Eigenwerte von $A$ sind die Nullstellen von $\mathcal{X}_A(\lambda)$. D.h. $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$.

**3b** Eigenvektoren von $A$.
Die Eigenvektoren von $A$ sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems $(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0}$ für $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$.
Für $\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow (A - E)\vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus hat man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -6 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = (1) + (2) \\ (3') = (1) - (3) \end{array}$$

Dass das Gleichungssystem ist unterbestimmt. Man setze $z = \mu$

$$(2') \rightsquigarrow -3y - 3\mu = 0 \Longrightarrow y = -\mu \ .(1') \rightsquigarrow 3x - 6\mu = 0 \Longrightarrow x = 2\mu \ .$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \\ -\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass man für den Eigenwert $\lambda = 1$ die Eigenvektoren $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält . Genauso erhält man für den Eigenwert $\lambda = -2$ die Eigenvektoren $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**3c**

Eine Matrix $B$, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist, wird spaltenweise gebildet aus den Eigenvektoren. Die entsprechende Diagonalmatrix $D$ enthält die Eigenwerte in der Diagonalen.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

**4a**

Gleichungssystem für die Unbekannten $x$, $y$ und $z$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -\alpha \\ 3 & -2 & 2 \\ -\alpha & 2 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

($\alpha$ und $\beta$ seien beliebige reelle Zahlen)

Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ -\alpha & 2 & -\alpha & \beta \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 3+2\alpha & -5\alpha & 0 \\ 0 & 3 & -2\alpha & \beta \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = 3(1) - \alpha(2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 3+2\alpha & -5\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(9-4\alpha) & \beta(3+2\alpha) \end{array}\right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -3(2') + (3+2\alpha)(3') \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist

(i) nicht lösbar, wenn
$\alpha(9-4\alpha) = 0$ und $\beta(3+2\alpha) \neq 0$. D.h. wenn ( $\alpha = 0$ oder $\alpha = \frac{9}{4}$) und $\beta \neq 0$.

(ii) eindeutig lösbar, wenn
$\alpha(9-4\alpha) \neq 0$ D.h. wenn $\alpha \neq 0$ und $\alpha \neq \frac{9}{4}$.

(iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn
$\alpha(9-4\alpha) = 0$ und $\beta(3+2\alpha) = 0$ D.h. wenn ($\alpha = 0$ und $\beta = 0$) oder ($\alpha = \frac{9}{4}$ und $\beta = 0$).

**4b**

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ wird durch die folgende Matrix $A$(mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

**Bestimmung einer Basis des Kerns von $f$.**

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \Longleftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1') \\ (2') = -2(1) + (2) \\ (3') = 2(1) + (3) \end{array}$$

Man setze $x_4 = \lambda$ und $x_3 = \mu$.

$$(2') \rightsquigarrow 7x_2 - 6\mu + 3\lambda = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{6}{7}\mu - \frac{3}{7}\lambda$$

$$(1') \rightsquigarrow x_1 = -\frac{9}{7}\mu + \frac{1}{7}\lambda$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7}\mu + \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7}\mu - \frac{3}{7}\lambda \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{6}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass eine Basis des Kerns von $f$ ist

$$B_1 = \left\{ \vec{a_1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{6}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{Dim (Kern } (f)) = 2$$

**Bestimmung einer Basis des Bildes von $f$.**

Die lineare unabhängigen Spalten von $A$ bilden eine Basis des Bildes von $f$. Mit Spaltenumformungen erhält man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass eine Basis des Bildes von $f$ ist

$$B_2 = \left\{ \vec{b1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{Dim (Bild } (f)) = 2$$

**Bestätigung der Dimensionsformel.**

$$\begin{aligned} \textbf{Dim}(\mathbb{R}^4) &= \textbf{Dim(Kern } (f)) + \textbf{Dim(Bild } (f)) \Longleftrightarrow \\ 4 &= 2 + 2 \end{aligned}$$