KLAUSUR

Lineare Algebra
(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

30.8.2012

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch-Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 18 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden:

$$g_1 : \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}, \quad g_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie die Gleichung der Ebene, in welcher g_1 und g_2 liegen, in parameterfreier Form an.

(b) Durch die folgende Gleichung wird in der Gauß-Ebene eine Kurve gegeben:

$$2\,i\,|z-1| = z - \overline{z} + 2\,i\,.$$

Setzen Sie $z = x + y\,i$, $x, y \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie die Kurve. Skizzieren Sie die Kurve.

2. (a) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gilt die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

(b) Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Zeile subtrahieren und Entwicklungssatz anwenden).
(c) Welchen Rang besitzt die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ 2\,b & b & 0 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$?

Bitte wenden!

3. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ werde durch folgende Vorgaben festgelegt:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Geben Sie die Matrix $M(f)$ von f bezüglich der kanonischen Basen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ an.

(b) Bestimmen Sie den Rang von f, und geben Sie die Dimension des Kerns von f an.

(c) Welches Urbild besitzt der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$?

4. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von von A.

(b) Sei U der Eigenraum des Eigenwerts 1. Geben Sie eine Basis von U an.

(c) Drücken Sie die Matrixpotenzen A^3, A^4, A^5 sowie die Inverse A^{-1} durch E, A, A^2 aus.

Lösungen:

1.a)

$$\begin{pmatrix} 5+s \\ 4+2\,s \\ 6+3\,s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3\,t \\ 2\,t \\ 2+t \end{pmatrix}$$

$$s-3\,t=-4\,, 2\,s-2\,t=-4\,, 3\,s-t=-4\,.$$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$. Also: $s=-1,\ t=1$.

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\,.$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}\,.$$

$$\vec{n}\,\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{n}\cdot\vec{OS} \iff -4\,x+8\,y-4\,z=-12 \iff x-2\,y+z=3\,.$$

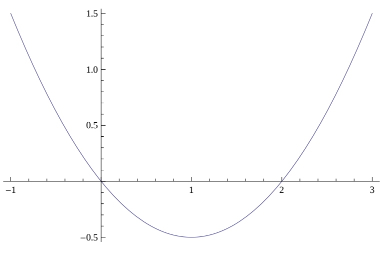
1.b)

$$z = x + y\,i\,,$$

$$2\,i\,|x-1+y\,i| = 2\,i\,y + 2\,i\,,$$

$$|x-1+y\,i| = y+1\,,\ y \geq -1\,,$$

$$(x-1)^2+y^2 = y^2+2\,y+1\,,\ y = \frac{1}{2}\,(x-1)^2 - \frac{1}{2}\,.$$



Die Parabel $y = \frac{1}{2}\,(x-1)^2 - \frac{1}{2}$.

2.a)

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + i\,c & b + i\,d \\ -i\,a + c & -i\,b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$c = i\,a\,,\; d = i\,b\,.$$

2.b)

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z & 0 \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z & 0 \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z & 0 \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach der vierten Spalte:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{pmatrix} .$$

2.c)

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ 2\,b & b & 0 \end{pmatrix}$$

Fälle:
$a = 0, b = 0$: $\mathrm{Rg}(A) = 0$.
$a \neq 0, b = 0$: $\mathrm{Rg}(A) = 1$. Zeile 1 linear unabhängig.
$a = 0, b \neq 0$: $\mathrm{Rg}(A) = 1$. Zeile 2 linear unabhängig.
$a \neq 0, b \neq 0$: $\mathrm{Rg}(A) = 2$. Spalte 2 und Spalte 3 linear unabhängig.

3.a)

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

$$M(f) = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -2\\\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Oder:

$$M(f) = \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -2\\\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

3.b)

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -2\\\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & -1\\0 & \frac{4}{3}\end{pmatrix} \implies \mathrm{Rg}(M(f)) = 2\,.$$

(Oder: $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ bzw. $f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig).

Dimensionsformel: $n-\mathrm{Rg}(M(f)) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(f)) \implies 2-2 = 0 = \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(f))$.

3.c) Kern(f) $= \{\vec{0}\}$ und

$$\begin{pmatrix}3\\6\\-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

folgt für das Urbild:

$$2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}.$$

Oder: $\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -2\\\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\\-1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & -1\\0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}.$

4.a)

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & 0 & 1\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix} = -\lambda^3+1\,.$$

$$(\lambda^3-1):(\lambda-1)=\lambda^2+\lambda+1$$

$$\lambda^2+\lambda+1=0 \implies \lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\,.$$

Oder: $\lambda^3=1=e^{0\,i} \implies \lambda_k=e^{(k-1)\,\frac{2\pi}{3}\,i}$. Eigenwerte: $1, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$.

4.b) Eigenvektoren: $\lambda_1=1$:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$\vec{u}=\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{C}$. Basis: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

4.c)

$$-A^3+E=0$$
$$A^3=E\,, A^4=A\,, A^5=A^2\,,$$

$\det(A)=1$, A invertierbar.

$$A^{-1}\,A^3=A^{-1}$$
$$A^{-1}=A^2\,.$$

Oder Inverse:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\,,$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=A^2\,.$$