KLAUSUR

Lineare Algebra
(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

29.08.2013

(Hans-Georg Rück)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 18 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

Aufgabe 1: a) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z mit

$$|z - \sqrt{2}| = |z|\,.$$

Berechnen Sie dazu Real- und Imaginärteil dieser Zahlen z und beschreiben Sie den geometrischen Ort dieser Zahlen in der komplexen Zahlenebene.
Gibt es unter diesen Zahlen z Einheitswurzeln? D.h. gibt es darunter Zahlen z mit $z^n = 1$ für eine natürliche Zahl n? Bestimmen Sie diese Einheitswurzeln durch Angabe von z und zugehörigem n. Begründen Sie Ihre Rechenschritte!
(Hinweis: Eine Skizze ist hilfreich, genügt allerdings nicht als Lösung.)

b) Bestimmen Sie Winkel und Betrag der komplexen Zahl $i \cdot (1 + i)$.
(Wie üblich sei dabei i die komplexe Zahl mit $i^2 = -1$.)

Aufgabe 2: a) Berechnen Sie die Ebene E, die durch die Punkte

$$A = (2, -1, 5)\,,\ B = (-1, 0, 2)\,,\ C = (1, 0, 0)$$

geht. Geben Sie E sowohl in Parameterform als auch in Hessescher Normalenform an.
Zeigen Sie, dass der Punkt $D = (-2, -1, 9)$ auf der Ebene E liegt.

b) Betrachten Sie das Viereck V mit den Punkten A, B, C, D aus Teil a) als Ecken. Die Strecke von A nach B liegt im Innern dieses Vierecks (diese Tatsache dürfen Sie unbewiesen benutzen!). Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks V.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Mit

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

seien die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, analog mit

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die des $\mathbb{R}^4$.
Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei durch folgende Festlegung gegeben:

$$f(\vec{b}_1) = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\,\vec{a}_3\,,\ f(\vec{b}_2) = 2\,\vec{a}_1 + 3\,\vec{a}_2 + 5\,\vec{a}_3\,,$$

$$f(\vec{b}_3) = 3\,\vec{a}_1 + 4\,\vec{a}_2 + 7\,\vec{a}_3\,,\ f(\vec{b}_4) = 4\,\vec{a}_1 + 5\,\vec{a}_2 + 9\,\vec{a}_3\,.$$

a) Berechnen Sie die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$.
b) Berechnen Sie eine Basis des Kerns von f.
c) Berechnen Sie die Dimension des Bildes von f mit dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen.
d) Berechnen Sie eine Basis des Bildes von f.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Matrix $A \in \mathrm{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ als

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisieren Sie die Matrix A, d.h. berechnen Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB = D$ gilt.

Lösung
Aufgabe 1

(a) Man setze $z = x + iy$.

$$|z-\sqrt{2}| = |z| \iff |x+iy-\sqrt{2}| = |x+iy| \iff |(x-\sqrt{2})+iy| = |x+iy|$$

$$\iff (x-\sqrt{2})^2 + y^2 = x^2 + y^2 \iff x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = x^2 \iff x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Der Realteil dieser Zahlen beträgt $\frac{\sqrt{2}}{2}$, wobei der Imaginärteil beliebig ist. Somit liegen diese Zahlen auf einer Gerade parallel zur imaginären Achse, die durch den Punkt $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ geht.

Wenn solch ein z Einheitswurzel ist, dann muss $|z| = 1$ sein. D.h.

$$|\frac{\sqrt{2}}{2} + iy| = 1 \iff \frac{1}{2} + y^2 = 1 \iff y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Somit sind $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ Kandidaten. Im Polardarstellung hat man

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{und} \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}, \qquad |z_1^{4k}| = |e^{ik\pi}| = 1 = |z_2^{4k}|, \quad k \in \mathbb{N}\ .$$

Die sind Einheitswurzeln mit $n = 4k, k \in \mathbb{N}$.

(b) z=i(i+1)

$$z = i^2 + i = -1 + i\ . \quad |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ .$$

$$arg(z) = 2\arctan\left(\frac{1}{-1+\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4} = 135^o\ .$$

Aufgabe 2

(a) Parameterform der Ebene.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \mu\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ .$$

Hessesche Normalenform der Ebene: sei $\vec{n}$, der Normalvektor.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ . \quad |\vec{n}| = 2\sqrt{38}$$

$$E: \quad \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \ .$$

Damit der Punkt $D = (-2, -1, 9)$ auf der Ebene E liegt, muss man λ und μ finden können, damit der Vektor $\vec{OD}$ die Parameterform der Ebene erfüllt. Das passiert genau wenn $\lambda = 1$ und $\mu = 2$.

(b) Flächeninhalt des Viereck

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \ .$$

Sei F_1 bzw. F_2, der Flächeninhalt des Dreieck ABD bzw. ABC. Dann ist der Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ ist $F = F_1 + F_2$.

$$F = F_1 + F_2 = \frac{1}{2}||\vec{AD} \times \vec{AB}|| + \frac{1}{2}||\vec{AB} \times \vec{AC}||$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{38} + \sqrt{38} = 3\sqrt{38} FE \ .$$

Aufgabe 3

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \ .$$

(b) Basis des Kerns.
Für den Kern gilt $f(\vec{x}) = \vec{0}$. D.h. $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1') = (1) \\ (2') = -(1) + (2) \\ (3') = -2(1) + (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1'') = (1') \\ (2'') = (2') \\ (3'') = -(2') + (3') \end{array}$$

Setze $x_4 = \beta$ und $x_3 = \alpha$. Aus $(2'')$ hat man $x_2 = -\alpha - \beta$ und aus $(1'')$ $x_1 = -\alpha - 2\beta$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - 2\beta \\ -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

somit ist

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des Kerns von f.

(c) Dim($\mathbb{R}^4$)=Dim(Bild(f))+Dim(Kern(f)) $\Longleftrightarrow 4 =$ Dim(Bild(f))$+2$. Daraus folgt, dass Dim(Bild(f))$= 2$.

(d) Basis des Bildes.
Die Linearen unabhängigen Spalten der Matrix A bilden eine Basis des Bildes von f. Als erste transponieren wir die Matrix A, führen wir den Gauß-Algorithmus durch und transponieren wir die Matrix. Die nicht verschwindenden Spalten bilden die gesuchte Basis.

$$A^T : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (1') = (1) \\ (2') = -2(1) + (2) \\ (3') = -3(1) + (3) \\ (4') = -4(1) + (4) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} (1'') = (1') \\ (2'') = (2') \\ (3'') = -(2') + (3') \\ (4'') = -(2') + (4') \end{array} \rightsquigarrow ()^T : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des Bildes von f ist.

Aufgabe 4

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

(a) Charakteristisches Polynom:

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) .$$

(b) Eigenwerte von A. Die sind die Nullstellen des Charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda)$. Wir bekommen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$.

(c) Eigenvektoren
Die Eigenvektoren $\vec{u}$ zum Eigenwert λ sind die Lösungen des Gleichungssystems $A \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u}$, D.h $(A - \lambda E) \cdot \vec{u} = \vec{0}$
Eigenvektor für $\lambda_1 = -1$.

$$(A - \lambda_1 E) \cdot \vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow (A + E) \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} (1') = (1) \\ (2') = (2) \\ (3') = -(1) + (3) \end{array}$$

Man setze $u_2 = \alpha$. Aus $(3')$ hat man $u_3 = 0$ und aus $(1')$ $u_1 = 0$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ ist. Genauso findet man für $\lambda_2 = 1$, bzw. für $\lambda_3 = 2$ die Eigenvektoren $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, bzw. $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit bildet die Vektoren $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ und $\vec{v_2}$ die gesuchte Matrix B.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$