KLAUSUR

Lineare Algebra
(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

28.8.2014

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch-Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 18 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $||\vec{a}|| = 3, ||\vec{b}|| = 2$, $(3\,\vec{a} + \vec{b})\,(\vec{a} - 2\,\vec{b}) = 0$. Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels, den $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen.

   (b) Kann man $x, y, z \in \mathbb{R}$ so wählen, dass die drei Vektoren
   $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind?

   (c) Durch die Gleichung $-3\,x + 2\,y + z = -2$ wird eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Bestimmen Sie den Abstand der Ebene vom Nullpunkt.
   Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an.

2. (a) Durch die folgende Gleichung wird in der Gauß-Ebene eine Kurve gegeben:
   $$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 2\,.$$
   Setzen Sie $z = x + y\,i$, $x, y \in \mathbb{R}$, und bestimmen Sie die Kurve. Skizzieren Sie die Kurve.
   (b) Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $z^3 = 1 - i$.
   (c) Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms
   $p(z) = (z^2 + i)\,(z^3 + z^2 + z + 1)$. (Hinweis: -1 ist eine Nullstelle).

   Bitte wenden!

3. (a) Wie lautet die Basisübergangsmatrix B von der kanonischen Basis $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, zur Basis $\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ des $\mathbb{C}^3$? Bestimmen Sie die Inverse B^{-1}.

   (b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ wird festgelegt durch die Bildvektoren:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\i\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}.$$

   Geben Sie die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basen im $\mathbb{C}^3$ und $\mathbb{C}^2$ an.

   (c) Bestimmen Sie den Rang von f, und geben Sie die Dimension des Kerns von f an.

4. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 3\\0 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

   (a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A, und geben Sie die zum Eigenwert $\sqrt{10}$ gehörigen Eigenvektoren an.

   (b) Berechnen Sie die Matrix A^9.

Lösungen:

1.a)

$$(3\,\vec{a}+\vec{b})\,(\vec{a}-2\,\vec{b}) = 3\,\vec{a}\,\vec{a} - 2\,\vec{b}\,\vec{b} - 5\,\vec{a}\,\vec{b}\,,$$

$$27 - 8 - 5\,\vec{a}\,\vec{b} = 0\,, \quad \vec{a}\,\vec{b} = \frac{19}{5}\,,$$

$$\vec{a}\,\vec{b} = 3\cdot 2\,\cos(\alpha)\,, \quad \cos(\alpha) = \frac{19}{30}\,.$$

1.b)

$$\lambda_1\,\vec{a}_1 + \lambda_2\,\vec{a}_2 + \lambda_3\,\vec{a}_3 = \vec{0} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 5 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & -\frac{1}{2} & y-\frac{x}{2} \\ 0 & 5 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & -\frac{1}{2} & y-\frac{x}{2} \\ 0 & 0 & z+10\,(y-\frac{x}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sind linear unabhängig unter der Bedingung: $z + 10\,(y-\frac{x}{2}) \neq 0$.

Oder $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 5 & z \end{pmatrix} = 10\,y - 5\,x + z \neq 0$.

1.c)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad ||\vec{n}|| = \sqrt{14}\,,$$

$$-\frac{3}{\sqrt{14}}\,x + \frac{2}{\sqrt{14}}\,y + \frac{1}{\sqrt{14}}\,z = -\frac{2}{\sqrt{14}}\,,$$

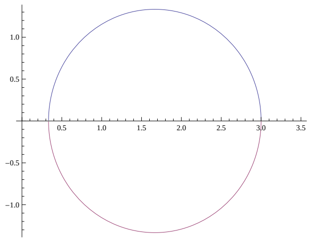
Abstand: $\frac{2}{\sqrt{14}}$.

$$-3\,x + 2\,y + z = -2\,, \quad y = s\,, z = t\,, x = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\,s + \frac{1}{3}\,t\,,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\,\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

2.a)

$$|z+1| = 2\,|z-1|\,, \quad z \neq 1\,,$$
$$(x+1)^2 + y^2 = 4\left((x-1)^2 + y^2\right)$$
$$x^2 - \frac{10}{3}\,x + 1 + y^2 = 0 \iff \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$



Der Kreis $\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

2.b)

$$1 - i = \sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}\,i}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2}\,e^{-\frac{\pi}{12}\,i}\,, \\ z_2 &= \sqrt[6]{2}\,e^{\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\,\pi}{3}\right)\,i}\,, \\ z_3 &= \sqrt[6]{2}\,e^{\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{4\,\pi}{3}\right)\,i}\,. \end{aligned}$$

2.c)

$$z^2 = -i\,, \quad z^2 = e^{-\frac{\pi}{2}\,i}\,, \quad z_1 = e^{-\frac{\pi}{4}\,i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\,, z_2 = -z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\,,$$

$z^3 + z^2 + z + 1 = z^2\,(z+1) + z + 1 = (z+1)\,(z^2+1)\,, \qquad z_3 = -1\,, z_4 = i\,, z_5 = -i\,.$

Oder: Polynomdivision

$$(z^3 + z^2 + z + 1) : (z+1) = (z^2 + 1)$$

3.a)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & i & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & -i & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

3.b)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} - i\, f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} , f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - i\, f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} ,$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & i \\ i & 3 & 0 \end{pmatrix} .$$

Oder:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ i & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & i \\ i & 3 & 0 \end{pmatrix} .$$

3.c) $\mathrm{Rg}(f) = 2$.

Die Bildvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind l.u.

Bzw. die Bildvektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind l.u.

$\mathrm{Dim}(\mathrm{Bild}(f)) = \mathrm{Rg}(f) = 2$.

$3 - \mathrm{Rg}(f) = 1 = \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(f))$.

4.a)

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 10\,\lambda\,.$$

$$\lambda_1 = 0\,, \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{10}\,.$$

$$\left.\begin{pmatrix} -\sqrt{10} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{10} & 3 \\ 0 & 3 & -\sqrt{10} \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{pmatrix} -\sqrt{10} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{\sqrt{10}} & 3 \\ 0 & 3 & -\sqrt{10} \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{pmatrix} -\sqrt{10} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{\sqrt{10}} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren:

$$\mu \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{10}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \neq 0\,.$$

4.b)

$$A^3 = 10\,A\,.$$

$$\begin{aligned} A^3 &= 10\,A \\ A^4 &= 10\,A^2 \\ A^5 &= 10\,A^3 = 10^2\,A \\ A^6 &= 10^2\,A^2 \\ A^7 &= 10^2\,A^3 = 10^3\,A \\ A^8 &= 10^3\,A^2 \\ A^9 &= 10^3\,A^3 = 10^4\,A \end{aligned}$$

Bzw.

$$A^9 = A^3\,A^3\,A^3 = 10^3\,A^3 = 10^4\,A\,.$$