KLAUSUR

Lineare Algebra (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

27.08.2015

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 18 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Durch die Gleichung $4x + 3y + z = -1$ wird eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Bestimmen Sie den Abstand der Ebene vom Nullpunkt. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an.

   (b) Sei $\alpha > 0$ eine reelle Zahl. Geben Sie die komplexe Zahl $z_0 = -\alpha + \alpha i$ in Polardarstellung an.
   Wie lauten die Lösungen der Gleichung

$$z^2 + 2iz = 1 + z_0.$$

   (c) Auf welcher Kurve in der Gaußschen Ebene liegen die komplexen Zahlen z, die durch folgende Gleichung gegeben werden

$$\mid z + i \mid^2 = Re(z + 1)? \quad (Re = \text{ Realteil}).$$

   Hinweis: Setzen Sie $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$.

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

   (a) Berechnen Sie die Determinante von A durch Entwickeln nach der zweiten Zeile.

   (b) Kann man a, b, c so wählen, dass die Zeilenvektoren

$$\vec{z}_1 = (a, 1, 1), \quad \vec{z}_2 = (1, b, 1), \quad \vec{z}_3 = (1, 1, c)$$

   paarweise senkrecht stehen: $\vec{z}_1 \vec{z}_2 = 0,\ \vec{z}_1 \vec{z}_3 = 0$ und $\vec{z}_2 \vec{z}_3 = 0$?

   (c) Wie groß ist der Rang von A im Fall $a = 1$?

Bitte wenden!

3. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wird gegeben durch

$$f(\vec{e_1}) = \vec{e_3},\ f(\vec{e_2}) = -\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3},\ f(\vec{e_3}) = \vec{e_3}.$$

Dabei sind $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns sowie eine Basis des Bildes von f und bestätigen Sie die Dimensionsformel.

(c) Wie lautet die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sei A die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom sowie alle Eigenwerte von A und geben Sie für jeden Eigenwert den zugehörigen Eigenraum in möglichst einfacher Form an (ganzzahlig).
(Zwischenergebnis: $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$).

(b) Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, bestimmen Sie eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix D ist. Geben Sie auch D an.

Lösungen
1.a
Ein normierter Normalenvektor der Ebene ist:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

daraus folgt folgende Hessesche Normalform:

$$\frac{4}{\sqrt{26}} + \frac{3}{\sqrt{26}} + \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{-1}{\sqrt{26}},$$

wobei $\frac{1}{\sqrt{26}}$ ist der Abstand der Ebene vom Nullpunkt.

$$4x + 3y + z = -1, \quad y = s, z = t, x = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}t,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

1.b
Die Zahl

$$z_0 = -\alpha + \alpha i, \quad \alpha > 0$$

liegt im zweiten Quadranten der Gauß-Eebene:

$$|z_0| = \sqrt{2\alpha^2} = \sqrt{2}\alpha, \quad \arg(z_0) = \frac{3}{4}\pi, \quad z_0 = \sqrt{2}\alpha\, e^{\frac{3}{4}\pi i}.$$

$$z^2 + 2iz = 1 + z_0 \Leftrightarrow z^2 + 2iz - 1 = z_0 \Leftrightarrow (z+i)^2 = z_0 = \sqrt{2}\alpha\, e^{\frac{3}{4}\pi i}.$$

Also ergeben sich folgende Lösungen:

$$z_1 = -i + \sqrt[4]{2}\sqrt{\alpha}\, e^{\frac{3}{8}\pi i}, \quad z_2 = -i - \sqrt[4]{2}\sqrt{\alpha}\, e^{\frac{3}{8}\pi i}.$$

1.c
Wir setzen $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$. Die Gleichung

$$|z+i|^2 = \Re(z+1)$$

nimmt dann die Gestalt an:

$$x^2 + (y+1)^2 = x + 1.$$

Nur $x \geq -1$ ist sinnvoll. Umformen ergibt sich:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + (y+1)^2 = 1 + \frac{1}{4}$$

bzw.

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}.$$

Die Zahlen liegen auf einem Kreis in der Gaußschen Ebene mit dem Mittelpunkt $z_M = \frac{1}{2} - i$ und dem Radius $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2.a

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} &= (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} + b\det\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} + (-1)\det\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -(c-1) + b(ac-1) - (a-1) = 2 - a - b - c + abc.\end{aligned}$$

2.b

Die Bedingungen $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = 0,\ \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_3 = 0,\ \vec{z}_2 \cdot \vec{z}_3 = 0$, nehmen folgende Gestalt:

$$a + b + 1 = 0, \quad a + c + 1 = 0, \quad b + c + 1 = 0,$$

bzw.

$$a + b = -1, \quad a + c = -1, \quad b + c = -1.$$

Dieses System ist eindeutig lösbar:

$$a = b = c = -\frac{1}{2}.$$

2.c

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}, \quad b, c \in \mathbb{R}$$

wird umgeformt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}.$$

(i) Der Rang beträgt 3 für $b \neq 1$ und $c \neq 1$.

(ii) Der Rang beträgt 2 für $b \neq 1$ und $c = 1$ oder $b = 1$ und $c \neq 1$.

(iii) Der Rang beträgt 1 für $b = 1$ und $c = 1$.

3.a

Die Darstellungsmatrix von f bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ lautet:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3bBestimmung einer Basis des Kerns von f.

Der Kern von f ist die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{0}$, wobei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Mit dem Gauß Algorithmus erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}.$$

Man setze $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$. Aus der Gleichung (2) folgt $x_2 = 0$ und aus (1) folgt $x_1 = -\lambda$, d.h.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Eine Basis des Kerns von f besteht aus dem Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmung einer Basis des Bildes von f.

Da $\mathrm{Rg}(A) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2$ bilden je zwei linear unabhängige Spalten von A eine Basis von Bild(f). Z.B. sind die Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von

$\mathrm{Bild}(f)$.
Bestätigung der Dimensionsformel.

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{R}^3) &= \dim(\textbf{Kern}(f)) + \dim(\textbf{Bild}(f))\\ 3 &= 1+2.\end{aligned}$$

3c
Sei $\tilde{A}$ die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_2\}$ des $\mathbb{R}^3$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id)\ A\ M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id)\\ &= B^{-1}AB, \quad B = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Alternative:

$$\vec{b_1} = \vec{e_1} - \vec{e_3}, \quad \vec{b_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2}, \quad \vec{b_3} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}.$$

D.h.

$$\begin{aligned}f(\vec{b_1}) &= f(\vec{e_1}) - f(\vec{e_3})\\ &= \vec{e_3} - \vec{e_3}\\ &= \vec{0},\\ f(\vec{b_2}) &= f(\vec{e_1}) - f(\vec{e_2})\\ &= \vec{e_3} - (-\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3})\\ &= \vec{e_1} - \vec{e_2}\\ &= \vec{b_2},\\ f(\vec{b_3}) &= f(-\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3})\\ &= -\vec{e_3} + \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3} - \vec{e_3}\\ &= \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}\\ &= \vec{b_3}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\tilde{A} = M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.a

Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom.

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$. Durch Einsetzen sieht man sofort eine Nullstelle $\lambda = 1$. Polynomdivision durch den Linear Faktor $(\lambda - 1)$ fürt zu:

$$\chi_A(\lambda) = (-\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Also haben wir den Eigenwert $\lambda_1 = -1$ der algebraischen Vielfachheit 1 und den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ der algebraischen Vielfachheit 2.

Bestimmen wir zuerst die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$. Dazu lösen wir das LGS $A\vec{x} = -\vec{x}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also folgt, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis dieses Eigenraums ist.

Bestimmen wir jetzt die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 1$. Dazu lösen wir analog das LGS $A\vec{x} = \vec{x}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Somit besteht eine Basis dieses Eigenraums aus den Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.b

Im ersten Teil haben wir gesehen, dass die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte übereinstimmen. daher ist A diagonalisierbar.
Die Matrix B ergibt sich durch Aneinanderreihen gefundenen Basisvektoren:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalmatrix ist:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$