KLAUSUR

Lineare Algebra (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

31.08.2017

Prof. Dr. Andreas Bley
Dr. Anen Lakhal

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch-Nr.:

Hinweise:

- Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
- Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
- Geben Sie alle (Zwischen-) Rechenschritte an!
- Begründen Sie alle Rechenschritte und Schlussfolgerungen!
- Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte.
  Zum Bestehen der Klausur sollten 18 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Aufgabe 1

a) Gegeben sei die Ebene

$$E = \left\{ x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

i) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, also eine Gleichung der Form $\langle n, x \rangle = d$ mit normiertem Normalenvektor, die für alle $x \in E$ gilt.

ii) Entscheiden (und begründen) Sie, ob die Gerade

$$G = \left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

die Ebene E schneidet, parallel zu E verläuft oder komplett in E liegt.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie $x := \dfrac{5a + 10a \cdot i}{2 + i} \in \mathbb{C}$ in kartesischen und in Polarkoordinaten an.

c) Bestimmen Sie *alle* $z \in \mathbb{C}$, für die $(z-2)^3 - 8i = 0$ gilt. Geben Sie die Lösungen in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 2

a) Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie für alle endlichdimemsionalen $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W, alle Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$, und alle linearen Abbildungen $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$ wahr ist oder nicht.

Kreuzen Sie Ihre Antworten auf diesem Blatt an.

	wahr	falsch
$U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum.		
$U_1 \cap U_2$ ist ein Untervektorraum.		
$F(U_1 + U_2) = F(U_1) + F(U_2)$.		
$\dim(F(U_1 + U_2)) = \dim(F(U_1)) + \dim(F(U_2))$.		

b) Wir betrachten $V := \mathbb{C}^3$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle u, v \rangle := \bar{v}^T u$. Es sei

$$U := \mathrm{lin}(u^{(1)}, u^{(2)}) \qquad \text{mit} \quad u^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ i \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} .$$

($\mathcal{B} = (u^{(1)}, u^{(2)})$ ist eine Basis von U. Dies braucht nicht gezeigt werden.)

i) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

ii) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ -i \\ 5i \end{pmatrix}$ von U.

Bitte wenden!

Aufgabe 3
Die lineare Abbildung $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wird gegeben durch

$$\mathcal{L}(e_1) = 2e_1 - 2e_3, \quad \mathcal{L}(e_2) = e_1 - 2e_2 + e_3, \quad \mathcal{L}(e_3) = e_1 + 2e_2 - 3e_3.$$

Dabei ist $\mathcal{E} = (e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.

a) Geben Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{E}}(\mathcal{L})$ von $\mathcal{L}$ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^3$ an.

b) $\mathcal{B} = (b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ ist ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen von der Basis $\mathcal{B}$ zur Basis $\mathcal{E}$ und umgekehrt.

c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{L})$ von $\mathcal{L}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

d) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes sowie eine Basis des Kerns von $\mathcal{L}$.

Aufgabe 4
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und für jeden Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraumes von A.

c) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Wenn A diagobalisierbar ist, so geben Sie Matrizen S und D an, so dass $S^{-1}AS = D$ und D eine Diagonalmatrix ist. Andernfalls begründen Sie, wieso A nicht diagonalisierbar ist.

d) Berechnen Sie $\det(A)$. Ist die lineare Abbildung $\mathcal{L}_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der darstellenden Matrix A injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsskizzen und Hinweise:
Aufgabe 1 [4+2+4 Punkte]

a) i) Berechne Normalenvektor aus Richtungsvektoren:

$$n' := \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Berechne Norm

$$\|n'\| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

Normiere Normalenvektor

$$n := \frac{1}{\|n'\|} n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Berechne rechte Seite d den HNF durch Einsetzen des Ortsvektors der Ebene:

$$d = \langle \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{3}(2+2-2) = 2/3$$

HNF: $\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}, x\rangle = 2/3$

ii) G schneidet E in genau einem Punkt.

Begründung: Die 3 Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ von G und $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ von E sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^3$

Alternative Begründung:

- Ortsvektor $\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ von G liegt in E, da $\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Also mindestens ein Schnittpunkt.
- Richtungsvektor $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ von G ist nicht orthogonal zum Normalenvektor von E, da $\langle \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix} \rangle = -\frac{2}{3} \neq 0$. Also also höchstens ein Schnittpunkt.

  Alternative Begründung: Berechne Schnittmenge $G \cap E$ durch Lösen eines LGS, z. B.

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

Das LGS hat eine eindeutige Lösung, also gibt es genau einen Schnittpunkt.

b)

$$
\begin{aligned}
x = \frac{5a + 10ai}{2+i} &= \frac{(5a+10ai)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\
&= \frac{(5a+10ai)(2-i)}{5} \\
&= (a+2ai)(2-i) \\
&= 4a + 3ai \\
&= a \cdot (4+3i) \\
&= a \cdot \underbrace{\sqrt{4^2+3^2}}_{=5} \cdot e^{\arccos\frac{4}{5} i} \\
&= 5a \cdot e^{\arccos\frac{4}{5} i}
\end{aligned}
$$

c) Umformen der Gleichung, so dass linke Seite reine Potenz und rechte Seite in Polarkoordinaten:

$$(z-2)^3 - 8i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-2)^3 = 8i = 8 \cdot e^{\frac{\pi}{2} i}$$

Lösungsformel für Potenz von Grad 3 liefert alle drei Lösungen z_0, z_1, z_2:

$$(z_k - 2) = 8^{1/3} e^{\frac{1}{3}\frac{\pi}{2} i} \cdot e^{k \frac{2\pi}{3} i} \qquad k = 0, 1, 2$$

also

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 2 + 2 \cdot e^{\frac{1}{3}\frac{\pi}{2} i} \cdot e^{0 \frac{2\pi}{3} i} = 2 + 2 \cdot e^{\frac{\pi}{6} i} \\
&= 2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = (2+\sqrt{3}) + i \\
z_1 &= 2 + 2 \cdot e^{\frac{1}{3}\frac{\pi}{2} i} \cdot e^{1 \frac{2\pi}{3} i} = 2 + 2 \cdot e^{\frac{5\pi}{6} i} \\
&= 2 + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = (2-\sqrt{3}) + i \\
z_2 &= 2 + 2 \cdot e^{\frac{1}{3}\frac{\pi}{2} i} \cdot e^{2 \frac{2\pi}{3} i} = 2 + 2 \cdot e^{\frac{3\pi}{2} i} \\
&= 2 + 2(-i) = 2 - 2i
\end{aligned}
$$

Lösungsskizzen und Hinweise:
Aufgabe 2 [4+6 Punkte]

a)

	wahr	falsch
$U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum.		X
$U_1 \cap U_2$ ist ein Untervektorraum.	X	
$F(U_1 + U_2) = F(U_1) + F(U_2)$.	X	
$\dim(F(U_1 + U_2)) = \dim(F(U_1)) + \dim(F(U_2))$.		X

b) i) Normalisiere $u^{(1)}$:

Berechne Norm $\|u^{(1)}\| = (\bar{u}^{(1)})^T u^{(1)} = \sqrt{9} = 3$

$$b^{(1)} := \frac{1}{\|u^{(1)}\|} u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ i \end{pmatrix}$$

Berechne Lot von $u^{(2)}$ auf $\mathrm{lin}(b^{(1)})$:

$$l^{(2)} := u^{(2)} - \langle b^{(1)}, u^{(2)} \rangle b^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} - \langle \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \rangle \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \cdot 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normiere $l^{(2)}$:

Berechne Norm $\|l^{(2)}\| = (\bar{l}^{(2)})^T l^{(2)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$b^{(2)} := \frac{1}{\|l^{(2)}\|} l^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine ONB ist $B' = (b^{(1)}, b^{(2)})$

ii) Berechne Lot von Q auf $\mathrm{lin}(b^{(1)}, b^{(2)})$:

$$l^{(3)} := Q - \langle b^{(1)}, Q \rangle b^{(1)} - \langle b^{(2)}, Q \rangle b^{(2)}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -i \\ 5i \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -i \\ 5i \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ i \end{pmatrix} \rangle \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ i \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -i \\ 5i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -i \\ 5i \end{pmatrix} - \frac{1}{9}(6 - 2 + 5) \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ i \end{pmatrix} - \frac{1}{8}(6 + 2 + 0) \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 4i \end{pmatrix}$$

Bestimme Norm des Lots:

$$dist(Q, U) = \|l^{(3)}\| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Lösungsskizzen und Hinweise:
Aufgabe 3 [1+3+3+3]

a) Darstellende Matrix bzgl. $\mathcal{E}$ kann direkt aus Definition von $\mathcal{L}$ abgelesen werden:

$$M_{\mathcal{E}}(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Basiswechselmatrix $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ kann direkt aus Definition von $\mathcal{B}$ abgelesen werden - die Spalten sind die Vektoren von b_1, b_2, b_3:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Basiswechselmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ erhält man durch Invertieren:
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = (M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1}$.

Gauß-Algorithmus zum Invertieren liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

also

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Man erhält darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{L})$ von $\mathcal{L}$ zur Basis $\mathcal{B}$ aus darstellender Matrix zur Basis E durch Multiplikation mit entsprechenden Basiswechselmatrizen:
$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot M_{\mathcal{E}}(\mathcal{L}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Variante 1:

Wende Gauß auf darstellende Matrix $M_{\mathcal{E}}(\mathcal{L})$ an, um Pivot/Nicht-Pivot-Spalten zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivotspalten sind Spalten 1 und 2, also bilden Spalten 1 und 2 der darstellende Matrix $M_{\mathcal{E}}(\mathcal{L})$ eine Basis des Bildes von $\mathcal{L}$:

$$\mathrm{Bild}(\mathcal{L}) = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Nicht-Pivotspalte ist Spalte 3. Mit $x_3 = s$ als freie Variable erhält man aus letzter Matrix die Beschreibung des Kerns von $\mathcal{L}$ (Lösungsraum des homogenen LGS $M_{\mathcal{E}}(\mathcal{L}) \cdot x = 0$):

$$\mathrm{Kern}(\mathcal{L}) = \{x = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\} = \mathrm{lin}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Variante 2:

Scharfer Blick auf darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{L})$ zur Basis $\mathcal{B}$:

Offensichtlich ist Spalte 3 gleich 0. Also ist b_3 im Kern von $\mathcal{L}$ enthalten.

Offensichtlich sind Spalten 1 und 2 linear unabhängig und die Bilder von b_1 und b_2 sind wieder nur Linearkombinationen aus b_1 ud b_2, da Zeile 3 gleich 0.

Mit dem Dimensionssatz folgt daraus, dass $\dim(\mathrm{Kern}(\mathcal{L}))) \leq 1$. Wegen $0 \neq b_3 \in \mathrm{Kern}(\mathcal{L}))$ folgt also $\mathrm{Kern}(\mathcal{L})) = \mathrm{lin}(b_3)$, d.h. b_3 ist eine Basis der Kerns.

Außerdem folgt (auch mit dem Dimensionsatz), dass b_1 undb_2 eine Basis von $\mathrm{Bild}(\mathcal{L})$ bilden.

Lösungsskizzen und Hinweise:
Aufgabe 4 [1.5+5.5+1.5+1.5]

a) Für $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ ist das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P_A(x) =& \det(A - x \cdot E) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 3 \\ 0 & 2-x & -3 \\ 3 & -3 & -5-x \end{pmatrix} \\ =&(2-x) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-x & -3 \\ -3 & -5-x \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2-x \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \\ =&(2-x)((2-x)(-5-x) - 9) + 3(-3)(2-x) \\ =&(2-x)(x^2 + 3x - 10 - 9 - 9) \\ =&(2-x)(x^2 + 3x - 28) = -x^3 - x^2 + 34x - 56 \\ =&(2-x)(4-x)(-7-x) \end{aligned}$$

b) Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischenPolynoms. Nullstellenberechnung entweder durch Abspalten des offensichtlichen Faktors $2 - x$ (siehe Berechnung des Polynoms) oder durch Teiler-Regel, anschließend pq-Formel.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 && (\text{mit } \mu_{alg}(\lambda_1) = \mu_{geo}(\lambda_1) = 1) \\ \lambda_2 &= 4 && (\text{mit } \mu_{alg}(\lambda_2) = \mu_{geo}(\lambda_2) = 1) \\ \lambda_3 &= -7 && (\text{mit } \mu_{alg}(\lambda_3) = \mu_{geo}(\lambda_3) = 1) \end{aligned}$$

(Bemerkung: Alle Nullstellen haben algebraische Vielfachheit 1, also haben alle Eigenwerte geometrische Vielfachheit 1 und die im folgenden berechneten Eigenräume müssen alle 1-dimensional sein.)

Die zugehörigen Eigenräume sind:

- Für $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{aligned} Eig(A, 2) =& Kern(A - 2E) = Kern \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & -7 \end{pmatrix} \\ =& Kern \begin{pmatrix} 3 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Gauß-Alg)} \\ =& \{ \begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \} = lin(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

Also ist $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ eine Basis von $Eig(A, 2)$.

- Für $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{aligned} Eig(A,4) =& Kern(A-4E) = Kern\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -9 \end{pmatrix} \\ =& Kern\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = lin(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

Also ist $(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix})$ eine Basis von $Eig(A,4)$.

- Für $\lambda_3 = -7$:

$$\begin{aligned} Eig(A,-7) =& Kern(A+7E) = Kern\begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ =& Kern\begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = lin(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

Also ist $(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$ eine Basis von $Eig(A,-7)$.

c) Es gibt genau $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ verschiedene Eigenwerte (alle mit geometrischer Vielfachheit 1), also ist A diagonalisierbar.

Wählt man als Spalten von S die Basisvektoren der Eigenräume, erhält man als D die Diagonalmatrix mit den zugehörigen Eigenwerten in der jeweiligen Spalte. Also:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ liefert } S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

d) $\det(A) = P_A(0) = -56$

Da $\det(A) \neq 0$, ist A regulär (bijektiv), also auch injektiv.