KLAUSUR

Lineare Algebra
(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

1.3.2012

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch-Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 18 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Durch die folgende Gleichung wird in der Gauß-Ebene eine Kurve gegeben:
$$|z - 2\,i| = \mathrm{Re}(z + 2)\,.$$
Setzen Sie $z = x + y\,i$, $x, y \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie die Kurve. Skizzieren Sie die Kurve. (Re = Realteil).
(b) Welche $z \in \mathbb{C}$ lösen die Gleichung:
$$(z^2 + 2)\,(z^3 - i) = 0\,?$$
(c) Geben Sie eine Basis des folgenden Unterraums $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^3$ an:
$$\mathbb{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 + 2\,i\,x_2 - i\,x_3 = 0 \right\}\,.$$

2. (a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ einen Winkel von $\frac{\pi}{6}$ einschließen. ($\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$).
(b) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen a, b, c, für welche die folgende Beziehung gilt:
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$
(c) Im Vektorraum $\mathbb{V}$ seien die Vektoren $\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,, \vec{a}_3\,, \vec{a}_4$ linear unabhängig. Sind die folgenden drei Vektoren linear unabhängig:
$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2\,, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_3 - \vec{a}_4\,, \quad \vec{b}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_4\,?$$

Bitte wenden!

3. Gegeben werden die Basen $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ im $\mathbb{R}^3$ und $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ im $\mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wie lautet die Basisübergangsmatrix von der Basis A zur kanonischen Basis $\left\{ \vec{e}_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bzw. von der Basis B zur kanonischen Basis $\left\{ \vec{e}_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

(b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wird gegeben durch:

$$f(\vec{a}_1) = \vec{b}_1 + 3\,\vec{b}_2\,, \quad f(\vec{a}_2) = -2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2\,, \quad f(\vec{a}_3) = \vec{b}_1 - \vec{b}_2\,,$$

Bestimmen Sie die Matrix $M(f)$ der Abbildung f bezüglich der Basis A im $\mathbb{R}^3$ und B im $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie den Rang von $M(f)$, und geben Sie die Dimension des Kerns von f an.

(c) Geben Sie die Matrix $\tilde{M}(f)$ von f bezüglich der kanonischen Basen im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ an.

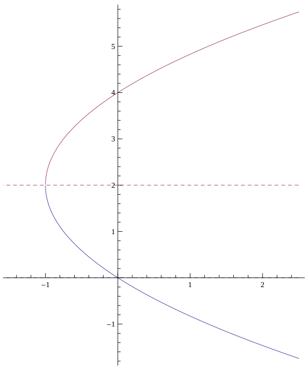
4. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und die Matrix A^8 mit dem Satz von Cayley-Hamilton.
(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
(c) Bestimmen Sie eine Matrix B so, dass $B^{-1}\,A\,B$ eine Diagonalmatrix D ist. Geben Sie D an. (B^{-1} muss nicht ausgerechnet werden).

Lösungen:

1.a)

$$z = x + y\,i\,, \quad x\,,y \in \mathbb{R}\,.$$
$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} = x+2\,, \quad x \geq -2\,.$$
$$x^2+(y-2)^2 = x^2+4\,x+4\,,$$
$$x = \frac{1}{4}\,(y-2)^2-1\,.$$



Die Parabel $x = \frac{1}{4}\,(y-2)^2-1$

1.b)

$$(z^2+2)\,(z^3-i) = 0 \iff z^2+2 = 0 \text{ oder } z^3-i = 0\,.$$
$$z^2+2 = 0 \implies z_1 = \sqrt{2}\,i\,, z_2 = -\sqrt{2}\,i\,.$$
$$z^3-i = 0 \iff z^3 = e^{\frac{\pi}{2}\,i}\,,$$
$$z_3 = e^{\frac{\pi}{6}\,i}\,, z_4 = e^{\frac{\pi}{6}\,i+\frac{2\,\pi}{3}\,i} = e^{\frac{5}{6}\,\pi\,i}\,, z_5 = e^{\frac{\pi}{6}\,i+\frac{4\,\pi}{3}\,i} = e^{\frac{3}{2}\,\pi\,i} = -i\,.$$

1.c)

$$x_3 = \lambda_3\,, x_2 = \lambda_2\,,$$
$$x_1 = -2\,i\,\lambda_2 + i\,\lambda_3\,,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,i\,\lambda_2 + i\,\lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -2\,i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

Basis:

$$\begin{pmatrix} -2\,i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

2.a)

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2 + a^2}\,, \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}\,,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + a\,,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + a}{\sqrt{2 + a^2}\,\sqrt{2}}\,.$$

Nur $a > -1$ kommt infrage:

$$\frac{(1 + a)^2}{(2 + a^2)\,2} = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow (a - 2)^2 = 0 \Longleftrightarrow a = 2\,,$$

2.b)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,b + 3\,c \\ -2\,a + 2\,c \\ -3\,a - 2\,b \end{pmatrix}\,,$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = c\,, b = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,c\,, c \in \mathbb{R}\,.$$

2.c)

$$\lambda_1\,\vec{b}_1 + \lambda_2\,\vec{b}_2 + \lambda_3\,\vec{b}_3 = \vec{0}\,,$$

$$\lambda_1\,(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \lambda_2\,(\vec{a}_1 + \vec{a}_3 - \vec{a}_4) + \lambda_3\,(\vec{a}_1 + \vec{a}_4)$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\,\vec{a}_1 + \lambda_1\,\vec{a}_2 + \lambda_2\,\vec{a}_3 + (-\lambda_2 + \lambda_3)\,\vec{a}_4 = \vec{0}\,.$$

Da die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ linear unabhängig sind , folgt:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\,, \lambda_1 = 0\,, \lambda_2 = 0\,, -\lambda_2 + \lambda_3 = 0\,.$$

Schließlich:

$$\lambda_1 = 0\,, \lambda_2 = 0\,, \lambda_3 = 0\,, \lambda_4 = 0\,.$$

Die Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ sind linear unabhängig.

3.a)

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_{3,1}\,,\ \vec{a}_2 = \vec{e}_{3,2} + \vec{e}_{3,3}\,,\ \vec{a}_3 = \vec{e}_{3,1} + \vec{e}_{3,2}\,,$$

$$\vec{e}_{3,1} = \vec{a}_1\,,\ \vec{e}_{3,2} = -\vec{a}_1 + \vec{a}_3\,,\ \vec{e}_{3,3} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3\,,$$

$$B_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_{2,1} + \vec{e}_{2,2}\,,\ \vec{b}_2 = -\vec{e}_{2,1} + \vec{e}_{2,2}\,,$$

$$\vec{e}_{2,1} = \frac{1}{2}\,\vec{b}_1 - \frac{1}{2}\,\vec{b}_2\,,\ \vec{e}_{2,2} = \frac{1}{2}\,\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\,\vec{b}_2\,,$$

$$B_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\,.$$

3.b)

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Rang:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \implies \mathrm{Rg}(M(f)) = 2\,.$$

Dimensionsformel:

$$n - \mathrm{Rg}(M(f)) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(f)) \implies 3 - 2 = 1 = \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(f))\,.$$

3.c) Mit:

$$B_{\mathbb{R}^2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und der Formel:

$$B_{\mathbb{R}^2}^{-1}\,M(f)\,B_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -7 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

Oder direkt:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_{3,1}) &= f(\vec{a}_1) = \vec{b}_1 + 3\,\vec{b}_2 = \vec{e}_{2,1} + \vec{e}_{2,2} + 3\,(-\vec{e}_{2,1} + \vec{e}_{2,2}) \\ &= -2\,\vec{e}_{2,1} + 4\,\vec{e}_{2,2}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_{3,2}) &= -f(\vec{a}_1) + f(\vec{a}_3) = -(\vec{b}_1 + 3\,\vec{b}_2) + \vec{b}_1 - \vec{b}_2 = 2\,\vec{e}_{2,1} - 4\,\vec{e}_{2,2} + 2\,\vec{e}_{2,1} \\ &= 4\,\vec{e}_{2,1} - 4\,\vec{e}_{2,2}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_{3,3}) &= f(\vec{a}_1) + f(\vec{a}_2) - f(\vec{a}_3) = f(\vec{a}_1) - f(\vec{a}_3) + f(\vec{a}_2) = -4\,\vec{e}_{2,1} + 4\,\vec{e}_{2,2} - 2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2 \\ &= -4\,\vec{e}_{2,1} + 4\,\vec{e}_{2,2} - 2\,(\vec{e}_{2,1} + \vec{e}_{2,2}) - \vec{e}_{2,1} + \vec{e}_{2,2} \\ &= -7\,\vec{e}_{2,1} + 3\,\vec{e}_{2,2}\,. \end{aligned}$$

4.a)

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 6 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\,(3-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\,\lambda\,.$$

$$A^2 - 5\,A = O \iff A^2 = 5\,A\,,$$

$$A^2 = 5\,A \Longrightarrow A^3 = 5\,A^2 = 5^2\,A \Longrightarrow A^4 = 5^3\,A \Longrightarrow A^5 = 5^4\,A\ldots$$

$$A^8 = 5^7\,A = 5^7\,\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

4.b)

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 6 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\,\lambda = 0\,.$$

Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 5\,, \lambda_2 = 0\,.$$

Eigenvektoren: $\lambda_1 = 5$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\,\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basis des Eigenraums:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\,.$$

$\lambda_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\,\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basis des Eigenraums:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

4.c)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\,, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$