KLAUSUR

Lineare Algebra (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

27.02.2013

(Hans-Georg Rück)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 18 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Wie üblich sei i die komplexe Zahl mit $i^2 = -1$.

   a) Berechnen Sie alle komplexen Zahlen z, die gleichzeitig die beiden Eigenschaften
   $$(z - i) \cdot (\bar{z} + i) = 1 \text{ und } |z| = \sqrt{2}$$
   erfüllen.
   Geben Sie die Lösungen sowohl in karthesischen Koordinaten (Real- und Imaginärteil) als auch in Polarkoordinaten (Winkel und Betrag) an.

   b) Berechnen Sie alle komplexen Zahlen, deren fünfte Potenz gleich der komplexen Zahl i ist.
   Geben Sie die Lösungen in Polarkoordinaten (Winkel und Betrag) an.

2. a) Die Ebene E_1 gehe durch die drei Punkte $(1, 0, -1)$, $(2, 1, 0)$ und $(2, 0, -2)$.
   Auf der Ebene E_2 mit dem Normalenvektor
   $$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   liege der Punkt $(1, 0, 0)$.
   Berechnen Sie die Schnittgerade $g = E_1 \cap E_2$ in Parameterform.

   b) Welchen Abstand hat der Punkt $(12, 3, -1)$ von der Ebene E_2, die in der Parameterform
   $$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$
   gegeben ist?

Bitte wenden!

3. Wie üblich seien

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^3$.
Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die folgende Festlegung gegeben:

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 3\,\vec{e}_2 - 2\,\vec{e}_3 \ , \ f(\vec{e}_2) = 2\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \ , \ f(\vec{e}_3) = 3\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\,\vec{e}_3.$$

a) Berechnen Sie die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

b) Berechnen Sie eine Basis des Kerns von f.

c) Berechnen Sie eine Basis des Bildes von f.

d) Wie lautet der Dimensionssatz für lineare Abbildungen allgemein und was besagt er in diesem Beispiel? Formulieren Sie bitte die Aussagen in ganzen deutschen Sätzen mit allen Voraussetzungen!

4. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren von A.

c) Gibt es eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist? Wenn ja, geben Sie B an, wenn nein, begründen Sie dies.

Lösungsskizze

1. (a) Schreibt man $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, dann besagen die Bedingungen

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = 2.$$

Also der Schnitt zweier Kreise. Abziehen ergibt $-2y + 1 = -1$ oder $y = 1$. Einsetzen ergibt $x = \pm 1$. Zwei Lösungen:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{und} \quad z = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

(b) $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ dann sind die 5-ten Wurzeln von i gleich

$$z_j = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2\cdot 5} + \frac{2\pi}{5}j\right)} \quad \text{für} \quad j = 0, 1, 2, 3, 4.$$

2. (a) Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, zwei Ebenen zu schneiden (beide in Parameterform, beide in Normalform, gemischt, ...).

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x - y - 1 = 0 \right\}$$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} |\lambda, \mu, \in \mathbb{R} \right\}$$

Einsetzen von $x = 1 + \lambda + \mu, y = \lambda, z = -1 + \lambda - \mu$ ergibt $1 + \lambda + \mu - 1 - \lambda = 0$, also, $\mu = 0$. Somit

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Normalvektor für E_2

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

normiere $\vec{n}$:

$$|\vec{n}| = \sqrt{36+100+4} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35} \quad \text{also} \quad \vec{n_0} = \frac{1}{2\sqrt{35}}\begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gleichung für E_2:

$$\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Abstand:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right| = |\frac{1}{\sqrt{35}}(6+2)| = \frac{8}{\sqrt{35}}$$

3. (a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Löse LGS mit erweitertem Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) : \quad \text{Gauß} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : \quad \text{Basis des Kerns} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Gesucht ist eine Basis von $\mathrm{lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.

Man kann den Dimensionssatz benutzen (muss dann aber sauber argumentieren), dass die Dimensions gleich 2 ist. Anderseits sind die drei Vektoren linear abhängig, wie man aus dem Ansatz $\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{0}$ und Teil (a) sieht. (Dasselbe LGS). z.B.

sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig , wie man sofort sieht. Also z.B. Basis Bild: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) In der Vorlesung stand: ¡¡Seien V,W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung, dann gilt $dim(V) = dim(Kern(f)) + dim(Bild(f))$¿¿.

4. (a) $P_A(x) = -(x+2)(x+1)^2$. Eigenwerte: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$

(b) Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -2$

$$LGS \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\text{Basis des Eigenraums} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$

$$LGS \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{crc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\text{Basis des Eigenraums} \quad \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Es gibt kein B, weil es keine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A gibt.