KLAUSUR

Lineare Algebra
(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

27.2.2014

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch-Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 18 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Zeigen Sie für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$(3\,\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\,\vec{b}) - 7\,(\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{0}\,.$$

(b) Die Vektoren $\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ seien linear unabhängig. Sind die folgenden drei Vektoren linear unabhängig:

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \frac{1}{3}\,\vec{a}_3\,, \quad \vec{b}_2 = -\vec{a}_1 + 2\,\vec{a}_2 - \vec{a}_3\,, \quad \vec{b}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3\,?$$

(c) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass sich die folgenden Geraden schneiden:

$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\,, \quad g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\,.$$

2. (a) Durch die folgende Gleichung wird in der Gauß-Ebene eine Kurve gegeben:

$$|z + 2\,i| = \mathrm{Im}(\bar{z} + i)\,.$$

Setzen Sie $z = x + y\,i$, $x, y \in \mathbb{R}$, und bestimmen Sie die Kurve. Skizzieren Sie die Kurve.
(b) Geben Sie die komplexe Zahl $a = 1 + \sqrt{3}\,i$ in Polardarstellung an. ($\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$). Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $z^5 = a^2$.
(c) Schreiben Sie das Polynom $p(z) = z^6 - 2\,z^2$ als Produkt von Linearfaktoren.

Bitte wenden!

3. (a) Geben Sie eine Basis des folgenden Unterraums $U \subset \mathbb{C}^3$ an:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mid i\, a_1 - 2\, a_2 = i\, a_3 \;,\; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C} \right\} .$$

(b) Der Unterraum $V \subset \mathbb{R}^3$ besitzt die Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.

(c) Geben Sie die Basisübergangsmatrix von der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zur Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^2$ an.

4. (a) Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ werde durch folgende Vorgaben festgelegt:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie die Matrix $M(f)$ von f bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ und der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^3$ an.
Bestimmen Sie den Rang von f, und geben Sie die Dimension des Kerns von f an.

Welches Urbild besitzt der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$?

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie die Matrix A^{10} an.

Lösungen:

1.a)

$$\begin{aligned}(3\,\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-2\,\vec{b})-7\,(\vec{b}\times\vec{a}) &= 3\,(\vec{a}\times\vec{a})+\vec{b}\times\vec{a}-6\,(\vec{a}\times\vec{b})-2\,(\vec{b}\times\vec{b})-7\,(\vec{b}\times\vec{a})\\ &= \vec{b}\times\vec{a}+6\,(\vec{b}\times\vec{a})-7\,(\vec{b}\times\vec{a})=\vec{0}\,.\end{aligned}$$

1.b)

$$\lambda_1\,\vec{b}_1+\lambda_2\,\vec{b}_2+\lambda_3\,\vec{b}_3=\vec{0}\iff \begin{array}{l}\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\,,\\ -\lambda_1+2\,\lambda_2+\lambda_3=0\,,\\ \dfrac{1}{3}\,\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0\,,\end{array}$$

Determinante der Systemmatrix:

$$\det\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&1\\\frac{1}{3}&-1&-1\end{pmatrix}=0$$

Die Vektoren sind linear abhängig. Oder: Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&1\\\frac{1}{3}&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&1\\1&-3&3\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\0&2&4\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

System besitzt nichttriviale Lösungen. Vektoren sind linear abhängig.
1.c) Schneiden:

$$\begin{pmatrix}s-\alpha\,t=-1\,,\\-s-2\,t=-1\,,\\s-t=2\,,\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-\alpha\\-1&-2\\1&-1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-\alpha\\0&-2-\alpha\\0&-1+\alpha\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

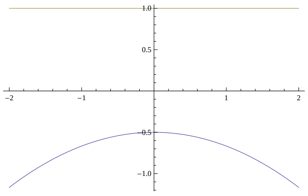
Schnittpunkt existiert für $\alpha=-8$. Geometrisch:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1+\alpha\\2+\alpha\end{pmatrix}\neq\vec{0},\ \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right]=8+\alpha=0\,.$$

Geraden schneiden sich für $\alpha=-8$.

2.a)

$$\sqrt{x^2+(y+2)^2} = -y+1\,,1 \geq y\,,$$
$$x^2+(y+2)^2 = (-y+1)^2$$
$$x^2+y^2+4\,y+4 = y^2-2\,y+1$$
$$y = -\frac{1}{6}\,x^2-\frac{1}{2}\,.$$



Die Parabel $y = -\frac{1}{6}\,x^2-\frac{1}{2}$ mit der Geraden $y=1$

2.b)

$$|a| = 2\,, \quad \arg(a) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}\,, \quad a = 2\,e^{\frac{\pi}{3}\,i}\,.$$
$$z^5 = 4\,e^{\frac{2\,\pi}{3}\,i}\,.$$
$$z_k = \sqrt[5]{4}\,e^{\left(\frac{2\,\pi}{15}+(k-1)\,\frac{2\,\pi}{5}\right)\,i}\,, k = 1,2,3,4,5\,.$$

2.c)

$$z^6-2\,z^2 = z^2\,(z^4-2)\,,$$
$$z^6-2\,z^2 = z^2\,(z^2-\sqrt{2})\,(z^2+\sqrt{2})\,,$$
$$z^6-2\,z^2 = z^2\,(z-\sqrt[4]{2})\,(z+\sqrt[4]{2})\,(z-\sqrt[4]{2}\,i)\,(z+\sqrt[4]{2}\,i)\,.$$

3.a)

$$i\,a_1 - 2\,a_2 - i\,a_3 = 0\,, \quad a_3 = \lambda\,, a_2 = \mu\,, a_1 = -2\,i\,\mu + \lambda\,, \lambda\,\mu \in \mathbb{C}\,.$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -2\,i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad \text{Basis:} \quad \begin{pmatrix} -2\,i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

3.b)

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}\,, \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

3.c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\,.$$

Oder direkt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

4.a)

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Rang:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{Rg}(M(f)) = 2 \,.$$

Dimensionsformel:

$$n - \text{Rg}(M(f)) = \text{Dim}(\text{Kern}(f)) \implies 2 - 2 = 0 = \text{Dim}(\text{Kern}(f)) \,.$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 2 \,, \lambda_2 = -1 \,.$$

$$f\left(2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \,, \quad \text{Urbild: } \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \,.$$

4.b)

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 16 = 0 \,.$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -4 \,, \lambda_2 = 4 \,.$
Eigenvektoren: $\lambda_1 = -4$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,, \quad \text{Basis des Eigenraums: } \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \,.$$

$\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,, \quad \text{Basis des Eigenraums: } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,.$$

Cayley-Hamilton:

$$A^2 - 16\,E = O \,, \quad A^2 = 16\,E \,.$$
$$A^{10} = 16^5\,E \,.$$