KLAUSUR

Lineare Algebra (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

26.02.2015

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 18 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Durch die Gleichung

$$3x + 2y - z = 5$$

wird eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Durch die Punkte $P_1 = (1, 1, 1)$ und $P_2 = (0, 0, -1)$ geht eine Gerade G. In welchem Punkt schneidet die Gerade G die Ebene E?

(b) Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 - i \quad \text{und} \quad z_2 = -1 - i.$$

Stellen Sie die Zahlen z_1 und z_2 in Polarform dar und berechnen Sie

$$z_1^7 z_2^9.$$

(c) Welche komplexen Zahlen z lösen folgende Gleichung

$$(z - 3i)^2 = 2i?$$

Geben Sie die Lösungen in kartesischen Koordinaten (Real- und Imaginärteil) an. (Hinweis: $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

2. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 0 \\ a & a^2 & -1 \\ 2 & a & -a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a den Rang von A.

(b) Unter welcher Bedingung ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$

(i) eindeutig lösbar,

(ii) nicht lösbar,

(iii) lösbar, aber nicht eindeutig.

Bitte wenden!

3. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wird gegeben durch

$$f(\vec{e_1}) = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3},\ f(\vec{e_2}) = \vec{e_1} + \vec{e_2},\ f(\vec{e_3}) = \vec{e_1} + \vec{e_3}.$$

Dabei sind $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns sowie eine Basis des Bildes von f und bestätigen Sie die Dimensionsformel.

(c) Wie lautet die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren von A.

(c) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Anwort.

Lösungen

1a $[\mathbf{3p = 0.5 + 1 + 1.5}]$

Wir berechnen einen Richtungsvektor von G:

$$\vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und bekommen

$$G : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OP_1} + t\vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 1-2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Durch Einsetzen in E ergibt sich:

$$3(1-t) + 2(1-t) - (1-2t) = 5,$$

also $t = -\frac{1}{3}$. Der Schnittpunkt lautet

$$S = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}).$$

1b $[\mathbf{4p = 0.5 + 0.5 + 1 + 1 + 1}]$

In Polarform

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \quad \text{mit} \quad r_1 = |z_1| = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \varphi_1 = 2\arctan(\frac{-1}{1+\sqrt{2}}) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \quad \text{mit} \quad r_2 = |z_2| = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = 2\arctan(\frac{-1}{-1+\sqrt{2}}) = \frac{5\pi}{4}.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_1^7 &= (\sqrt{2})^7 \, (e^{-\frac{\pi}{4}i})^7 \\ &= 8\sqrt{2}\, e^{-\frac{7}{4}\pi i} \\ &= 8\sqrt{2}\, e^{\frac{1}{4}\pi i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2^9 &= (\sqrt{2})^9 \, (e^{\frac{5}{4}\pi i})^9 \\ &= 16\sqrt{2}\, e^{\frac{45}{4}\pi i} \\ &= 16\sqrt{2}\, e^{\frac{5}{4}\pi i}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$z_1^7 z_2^9 = 256\, e^{\frac{3}{2}\pi i} = -256i.$$

1c $\textcolor{red}{[\mathbf{3p}]}$

aus

$$(z-3i)^2 = 2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$$

folgt:

$$\begin{aligned} z - 3i &= \pm\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i} \\ &= \pm\sqrt{2}\,(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})) \\ &= \pm(1+i). \end{aligned}$$

Also

$$z_1 = 3i + (1+i) = 1+4i, \quad z_2 = 3i - (1+i) = -1+2i.$$

2a $\textcolor{red}{[\mathbf{7p = 4 + 1.5 + 1.5}]}$

Mit dem Gauß Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 0 & 1 \\ a & a^2 & -1 & a-2 \\ 2 & a & -a & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} z_2 - az_1 \to z_1 \\ z_3 - 2z_1 \to z_3 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & -1 & -2 \\ 0 & -(a+2) & -a & -4 \end{array}\right).$$

Für $(a \neq 0)$

$$az_3 - (a+2)z_2 \to z_3 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -a^2+a+2 & -2(a-2) \end{array}\right),$$

wobei

$$-a^2 + a + 2 = -(a+1)(a-2).$$

$\mathrm{Rg}(A) = 2$ für $a = -1$ oder $a = 2$.
$\mathrm{Rg}(A) = 3$ für $a \neq -1$ und $a \neq 2$.

2b $\textcolor{red}{[\mathbf{3p = 1 + 1 + 1}]}$

Das LGS ist

(i) eindeutig lösbar, wenn $a \neq -1$ und $a \neq 2$.

(ii) nicht lösbar, wenn $a = -1$.

(iii) lösbar aber nicht eindeutig, wenn $a = 2$.

3a **[1p]**

Die Darstellungsmatrix von f bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ lautet:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3b **[5p = 2 + 1 + 1 + 1]**

Bestimmung einer Basis des Kerns von f.

Der Kern von f ist die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{0}$, wobei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Mit dem Gauß Algorithmus erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}.$$

Man setze $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$. Aus der Gleichung (2) folgt $x_2 = \lambda$ und aus (1) folgt $x_1 = -\lambda$, d.h.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Eine Basis des Kerns von f besteht aus dem Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmung einer Basis des Bildes von f.

Da Rg$(A) = \dim(\text{Bild}(f)) = 2$ bilden je zwei linear unabhängige Spalten von A eine Basis von Bild(f). Z.B. sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von Bild(f) .

Bestätigung der Dimensionsformel.

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}^3) &= \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) \\ 3 &= 1 + 2. \end{aligned}$$

3c **[4p = 1 + 1 + 1 + 1]**

Sei $\tilde{A}$ die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_2\}$ des $\mathbb{R}^3$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id)\ A\ M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) \\
&= B^{-1}AB, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Alternative:

$$\vec{b_1} = 3\vec{e_1}, \quad \vec{b_2} = \vec{e_2}, \quad \vec{b_3} = \vec{e_1} + \vec{e_3}.$$

D.h.

$$\begin{aligned}
f(\vec{b_1}) &= 3f(\vec{e_1}) \\
&= 6\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 3\vec{e_3} \\
&= 3\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 3(\vec{e_1} + \vec{e_3}) \\
&= \vec{b_1} + 3\vec{b_2} + 3\vec{b_3}, \\
f(\vec{b_2}) &= f(\vec{e_2}) \\
&= \vec{e_1} + \vec{e_2} \\
&= \frac{1}{3}\vec{b_1} + \vec{b_2}, \\
f(\vec{b_3}) &= f(e_1) + f(e_3) \\
&= 3\vec{e_1} + \vec{e_2} + 2\vec{e_3} \\
&= \vec{e_1} + \vec{e_2} + 2(\vec{e_1} + \vec{e_3}) \\
&= \frac{1}{3}\vec{b_1} + \vec{b_2} + 2\vec{b_3}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\tilde{A} = M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4a **[3p]**

Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom.

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & -4-\lambda & 0 \\ 9 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda+4)\begin{vmatrix} -(\lambda+4) & -4 \\ 9 & (8-\lambda) \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda+4)\big[-(\lambda+4)(8-\lambda)+36\big] \\ &= -(\lambda+4)(\lambda^2-4\lambda+4) \\ &= -(\lambda+4)(\lambda-2)^2.\end{aligned}$$

Daher sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 2$.

4b **[5p = 2.5 + 2.5]**

Bestimmen wir zuerst die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -4$. Dazu lösen wir das LGS $A\vec{x} = -4\vec{x}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also folgt, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis dieses Eigenraums ist.

Bestimmen wir jetzt die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 2$. Dazu lösen wir analog das LGS $A\vec{x} = 2\vec{x}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Somit besteht eine Basis dieses Eigenraums aus dem Vektor $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4c **[2p]**

Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar, da es nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren gibt, somit existiert keine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren.