KLAUSUR

Lineare Algebra (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

25.02.2016

Dr. habil Sebastian Petersen
Dr. Anen Lakhal

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 18 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Berechnen Sie einen Vektor der Länge $2\sqrt{6}$, der senkrecht auf

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

steht.

(b) Bestimmen Sie *alle* $z \in \mathbb{C}$, für die

$$z^3 = 27$$

gilt. Geben Sie die Ergebnisse in der Exponentialform ($re^{i\varphi}$) und in der kartesischen Form ($x + iy$) an.

(c) Auf welcher Kurve in der Gaußschen Ebene liegen die komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 2$, die durch folgende Gleichung gegeben werden

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-2}\right) = 0.$$

2. Gegeben sei ein lineares Gleichungssytem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & a \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Unter welcher Bedingung ist das lineare Gleichungssystem

(i) eindeutig lösbar,

(ii) nicht lösbar,

(iii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

(b) Berechnen Sie für $a = -6$ und $b = 0$ die Lösungsmenge des Systems. Was stellt die Lösungsmenge geometrisch dar?

Bitte wenden!

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -7 & 11 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Geben Sie ferner den Rang $\mathrm{rg}(f)$ und die Determinante $\det(f)$ an. (Hinweis: $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$, $\det(f) = \det(A)$.)

b) Sei $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\mathscr{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathscr{B}\mathscr{B}}(f)$ von f bez. der Basis $\mathscr{B}$.

4. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und die Eigenwerte von A.

b) Berechnen Sie für jeden Eigenwert λ von A eine Basis des Eigenraumes $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$.

c) Entscheiden Sie mit kurzer Begründung, ob A diagonalisierbar ist.

d) Bestimmen Sie $\det(A)$. Bestimmen Sie ferner die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{0}$. (Hinweis: Dies ist eine Verständnisfrage. Sie kann basierend auf Teil a) ohne weitere Rechnung beantwortet werden.)

Lösungen

Aufgabe 1.

a) Der gesuchte Vektor sei $\vec{c}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \alpha\,(\vec{a}\times\vec{b}) \\ &= \alpha\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \\ &= \alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

wobei $\alpha = 2$ oder $\alpha = -2$.

b) Die Lösungen der Gleichung

$$z^3 = 27 = 3^3 e^{i0}$$

sind $z_k = 3e^{i(2(k-1)\frac{\pi}{3})}, k = 1, 2, 3.$

$$\begin{aligned} z_1 &= 3, \\ z_2 &= 3e^{i\frac{2\pi}{3}} \simeq -1.5 + 2.6\,i, \\ z_3 &= 3e^{i\frac{4\pi}{3}} \simeq -1.5 - 2.6\,i. \end{aligned}$$

c) Wir setzen $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-2} &= \frac{x+1+yi}{x-2+yi} = \frac{(x+1+yi)(x-2+yi)}{(x-2)^2+y^2} \\ &= \frac{(x+1)(x-2)+y^2}{(x-2)^2+y^2} + \frac{-(x+1)y+(x-2)y}{(x-2)^2+y^2}\,i.\end{aligned}$$

Der Realteil wird Null, wenn die Bedingung

$$(x+1)(x-2)+y^2 = 0$$

erfüllt ist.Umgestellt ergibt sich die Gleichung

$$(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4},$$

welche den Kreis mit dem Radius $\frac{3}{2}$ und mit dem Mittelpunkt $z_0 = \frac{1}{2}$ beschreibt.

Aufgabe 2.

a) Mit dem Gauß Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & a & -1 \\ 0 & -2 & 1 & b \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad \mapsto \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & a & -1 \\ 0 & -2 & 1 & b \\ 0 & 6 & a+3 & 0 \end{array}\right) \quad \mapsto \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & a & -1 \\ 0 & -2 & 1 & b \\ 0 & 0 & a+6 & 3b \end{array}\right).$$

Das LGS ist

(i) eindeutig lösbar, wenn $a \neq -6$,

(ii) nicht lösbar, wenn $a = -6$ und $b \neq 0$,

(iii) lösbar aber nicht eindeutig, wenn $a = -6$ und $b = 0$.

b) Für $a = -6$ und $b = 0$ erhält man folgende Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Stufenform hat x_3 als freie Variable. Man sieht:

$$x_3 = \alpha \ \Rightarrow \ x_2 = 0.5\alpha \Rightarrow \ x_1 = -1 + 3.5\alpha.$$

Daher ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} |\alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

welche eine Gerade beschreibt.

Aufgabe 3.

a) Wir wenden den Gauß-Algorithmus auf A an. $\mapsto$ steht für einen "Gauß-Schritt".

$$
\begin{aligned}
A \quad &= \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -7 & 11 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -7 & 11 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\
&\mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 2.5 \\ 0 & \underline{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: T
\end{aligned}
$$

- $\operatorname{Kern}(f)$ ist offenbar der Lösungsraum des LGS $A\vec{x} = \vec{0}$. Die Stufenform hat x_3 als freie Variable. Man sieht:

  $$x_3 = \alpha \;\Rightarrow\; x_2 = -1.5\alpha \;\Rightarrow\; x_1 = -2.5\alpha.$$

  Daher gilt

  $$\operatorname{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -2.5\alpha \\ -1.5\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -2.5 \\ -1.5 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

  und $\left(\begin{pmatrix} -2.5 \\ -1.5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis des (1-dimensionalen) Raumes $\operatorname{Kern}(f)$.

- $\operatorname{Bild}(f)$ ist bekanntlich (vgl. Vorlesung) der Spaltenraum von A. Die Pivot-Indizes der Stufenform sind 1 und 2. Daher bilden die 1. und 2. Spalte von A eine Basis von $\operatorname{Bild}(f)$ (vgl. Vorlesung). Also ist

  $$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} \right)$$

  eine Basis von $\operatorname{Bild}(f)$.

- Nun ist $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Bild}(f)) = 2$
- Da A nicht Maximal-Rang hat, muss $\det(f) = \det(A) = 0$ gelten.

b) Offenbar gilt $M_{\mathscr{B}\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $M_{\mathscr{E}\mathscr{B}}$ ist die Inverse Matrix von $M_{\mathscr{B}\mathscr{E}}$. Wir berechnen diese Inverse mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Man sieht: $M_{\mathscr{E}\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Offenbar gilt: $M_{\mathscr{E}}(f) = A$.

Nach dem Transformationssatz folgt:

$$M_{\mathscr{B}}(f) = M_{\mathscr{E}\mathscr{B}} \cdot A \cdot M_{\mathscr{B}\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -2 & -5 & -2 \\ 6 & 15 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.

a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} P_A(t) &= \det\begin{pmatrix} 6-t & 0 & 2 \\ 0 & 1-t & 1 \\ -8 & 0 & -2-t \end{pmatrix} = \\ &= (1-t)\det\begin{pmatrix} 6-t & 2 \\ -8 & -2-t \end{pmatrix} = \\ &= (1-t)((6-t)(-2-t)+16) = \\ &= (1-t)(t^2-4t-12+16) = -(t-1)(t^2-4t+4) = \\ &= -(t-1)(t-2)^2 \end{aligned}$$

Die Menge der Eigenwerte von A ist $\mathbb{S}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2\}$.

b) • Der Eigenraum zu 1

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \mathbb{L}\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) = \mathbb{L}\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \mathbb{L}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

hat Basis $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Er ist 1-dimensional.

• Der Eigenraum zu 2

$$\mathrm{Eig}(A,2) = \mathbb{L}\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) = \mathbb{L}\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

hat Basis $\left(\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Er ist 1-dimensional.

c) Es gilt $\mu^{\mathrm{alg}}(A,2) = 2$ aber $\mu^{\mathrm{geo}}(A,2) = \dim(\mathrm{Eig}(A,2) = 1$. Also ist A nicht diagonalisierbar (weder über $\mathbb{R}$ noch über $\mathbb{C}$!).

d) Offenbar gilt $\det(A) = P_A(0) = -(-1)(-2) = -2$. Sei $\mathbb{L}$ die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{0}$. Wegen $\det(A) \neq 0$ muss $\mathbb{L} = \{\vec{0}\}$ gelten.