KLAUSUR

Lineare Algebra (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

02.03.2017

Prof. Dr. Andreas Bley
Dr. Anen Lakhal

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch-Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 18 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Lösungen

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

Aufgabe 1

a) Durch die Punkte $P_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix}4\\11\\12\end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix}2\\7\\9\end{pmatrix}$ wird im $\mathbb{R}^3$ die Ebene E aufgespannt.

i) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, also eine Gleichung der Form $\langle n, x\rangle = d$ mit normiertem Normalenvektor.

ii) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = \begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$ von der Ebene E.

b) Es seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$ gegeben.
Geben Sie die Polarkoordinatendarstellungen von z_1 und z_2 an.
Welche Polarkoordinatendarstellung hat die komplex Zahl $z = \frac{z_1^{10}}{z_2^4}$?

c) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die $(z - 3i)^4 - i = 0$ gilt. Geben Sie alle Lösungen in kartesischen Koordinaten an.

Lösung/Hinweise/Punktvergabe:

a) Ein Normalenvektor der Ebene E ist *(1 Punkt)*

$$n_0 = P_1P_2 \times P_1P_3 = \begin{pmatrix}3\\8\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}.$$

Ein Normierter Normalenvektor ist *(0,5 Punkte)*

$$n = \frac{n_0}{\|n_0\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}.$$

Die HNF der Ebene ist für $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in E$ durch die Gleichung *(1 Punkt)*

$$\begin{aligned} E &: \langle n, x\rangle = \langle n, P_1\rangle \\ E &: \frac{1}{5}(-3x_2 + 4x_3) = 3. \end{aligned}$$

gegeben.
Der Abstand des Punktes Q von der Ebene E ist *(0,5 Punkte)*

$$d(Q, E) = \left|\frac{1}{5}\Big(-3(-6) + 4(3)\Big) - 3\right| = 3$$

b) Poloarkoordinatendarstellungen der komplexen Zahlen z_1 und z_2 *(2 Punkte)*

$$z_1 = 1 + i = r_1 e^{i\varphi_1} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$z_2 = -1 - \sqrt{3} i = r_2 e^{i\varphi_2} = 2e^{i\frac{4}{3}\pi}.$$

Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahl $\frac{z_1^{10}}{z_2^4}$ *(1,5 Punkte)*

$$\begin{aligned}
\frac{z_1^{10}}{z_2^4} &= \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10}}{\left(2e^{i\frac{4}{3}\pi}\right)^4} \\
&= \frac{32e^{i\frac{5}{2}\pi}}{16e^{i\frac{16}{3}\pi}} = \frac{32e^{i\frac{\pi}{2}}}{16e^{i\frac{4}{3}\pi}} \\
&= 2e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\pi)} = 2e^{-i\frac{5}{6}\pi} = 2e^{i\frac{7}{6}\pi}
\end{aligned}$$

c) Die komplexen Zahlen z erfühlen die Gleichung $(z-3i)^4 = i$.
Offenbar gilt $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. *(0,5 Punkte)*
Die Lösungen von $(z-3i)^4 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sind die komplexen Zahlen *(1 Punkt)*

$$z_k = e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{2(k-1)\pi}{4})} + 3i, \quad k = 1, \ldots, 4,$$

Die Lösungen in kartesischen Koordinaten sind *(2 Punkte)*

$$\begin{aligned}
z_1 &= \cos(\frac{\pi}{8}) + i(\sin(\frac{\pi}{8}) + 3) \simeq 0,923 + i3,382 \\
z_2 &= \cos(\frac{5}{8}\pi) + i(\sin(\frac{5}{8}\pi) + 3) \simeq -3,382 + i3,923 \\
z_3 &= \cos(\frac{9}{8}\pi) + i(\sin(\frac{9}{8}\pi) + 3) \simeq -0,923 + i2,617 \\
z_4 &= \cos(\frac{13}{8}\pi) + i(\sin(\frac{13}{8}\pi) + 3) \simeq 0,382 + i2,076
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie für alle endlichdimemsionalen $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W, alle $k \in N$, und alle linearen Abbildungen $F \in \text{Hom}(V, W)$ wahr ist oder nicht. **Kreuzen Sie Ihre Antworten auf diesem Blatt an.**

	wahr	falsch
Wenn die Vektoren $v^{(1)}, \ldots, v^{(k)} \in V$ linear abhängig sind, dann sind auch die Vektoren $F(v^{(1)}), \ldots, F(v^{(k)})$ linear abhängig.		
Wenn die Vektoren $F(v^{(1)}), \ldots, F(v^{(k)}) \in W$ linear abhängig sind, dann sind auch die Vektoren $v^{(1)}, \ldots, v^{(k)}$ linear abhängig.		
Ist $\dim(W) < \dim(V)$, so folgt $\dim(\text{Kern}(F)) \neq 0$.		
Ist $\dim(\text{Kern}(F)) \neq 0$, so folgt $\dim(W) < \dim(V)$.		

b) Wir betrachten $V := \mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle u, v\rangle := v^T u$. Es sei

$$U := \operatorname{lin}(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}) \qquad \text{mit} \quad u^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix}5\\3\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad u^{(3)} = \begin{pmatrix}-3\\0\\9\\0\end{pmatrix}$$

($\mathcal{B} = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ ist eine Basis von U. Dies braucht nicht gezeigt werden.)
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Lösung/Hinweise/Punktvergabe:

a) *(Je korrekter Antwort 1 Punkt)*

	wahr	falsch
Wenn die Vektoren $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in V$ linear abhängig sind, dann sind auch die Vektoren $F(v^{(1)}), \dots, F(v^{(k)})$ linear abhängig.	X	
Wenn die Vektoren $F(v^{(1)}), \dots, F(v^{(k)}) \in W$ linear abhängig sind, dann sind auch die Vektoren $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ linear abhängig.		X
Ist $\dim(W) < \dim(V)$, so folgt $\dim(\operatorname{Kern}(F)) \neq 0$.	X	
Ist $\dim(\operatorname{Kern}(F)) \neq 0$, so folgt $\dim(W) < \dim(V)$.		X

b) Normalisiere $u^{(1)}$: $b^{(1)} := \frac{1}{\|u^{(1)}\|} u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$ *(1 Punkt)*

Berechne Lot von $u^{(2)}$ auf $\operatorname{lin}(b^{(1)})$: *(1 Punkt)*

$$l^{(2)} := u^{(2)} - \langle b^{(1)}, u^{(2)}\rangle b^{(1)} = \begin{pmatrix}5\\3\\0\\-1\end{pmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5\\3\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

Normiere $l^{(2)}$: $b^{(2)} := \frac{1}{\|l^{(2)}\|} l^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix}4\\3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ *(1 Punkt)*

Berechne Lot von $u^{(3)}$ auf $\text{lin}(b^{(1)}, b^{(2)})$: *(1,5 Punkte)*

$$
\begin{aligned}
l^{(3)} :=& u^{(3)} - \langle b^{(1)}, u^{(3)} \rangle b^{(1)} - \langle b^{(2)}, u^{(3)} \rangle b^{(2)} \\
=& \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{15}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-30}{30} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Normiere $l^{(3)}$: $b^{(3)} := \frac{1}{\|l^{(3)}\|} l^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *(1 Punkt)*

Eine ONB ist $B' = (b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)})$ *(0,5 Punkte)*

Bitte wenden!

Aufgabe 3

Die lineare Abbildung $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wird gegeben durch

$$\mathcal{L}(e_1) = 2e_2 + e_3, \quad \mathcal{L}(e_2) = e_1 - e_2 - e_3, \quad \mathcal{L}(e_3) = -2e_1 + 4e_2 + 3e_3.$$

Dabei ist $\mathcal{E} = (e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{E}}(\mathcal{L})$ von $\mathcal{L}$ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^3$.

(b) $\mathcal{B} = (b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ ist ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen von der Basis $\mathcal{B}$ zur Basis $\mathcal{E}$ und umgekehrt.

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{L})$ von $\mathcal{L}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

(d) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes sowie eine Basis des Kerns von $\mathcal{L}$.

Lösung/Hinweise/Punktvergabe:

a) Die darstellende Matrix von $\mathcal{L}$ bezüglich der kanonischen Basis ist *(1 Punkt)*

$$M_{\mathcal{E}}(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Die Basiswechselmatrix von der Basis $\mathcal{B}$ zur $\mathcal{E}$ ist *(1 Punkt)*

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Basiswechselmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ von der Basis $\mathcal{E}$ zur $\mathcal{B}$ ist *(3 Punkte)*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = (M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

c) Nach dem Transformationssatz folgt: *(3 Punkte)*

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}) &= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\, M_{\mathcal{E}}\, M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Eine Basis vom Bild($\mathcal{L}$) ist (b_1, b_2). *(1 Punkt)*
Eine Basis vom Kern($\mathcal{L}$) ist (b_3). *(1 Punkt)*

Aufgabe 4
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Es ist $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_1.

Berechnen Sie λ_1.

c) Bestimmen Sie nun alle Eigenwerte und Basen der zugehörigen Eigenräume von A. Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Betrachten Sie nun die Matrix $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

Berechnen Sie $\det(B)$. Ist die lineare Abbildung $\mathcal{L}_B$ mit der darstellenden Matrix B surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
(**Hinweis:** Diese Frage kann basierend auf Teil a) ohne weitere Rechnung beantwortet werden)

Lösung/Hinweise/Punktvergabe:

a) Das charakteristische Polynom von A ist *(2 Punkte)*

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -(2+\lambda) & -2 \\ 0 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 4. \end{aligned}$$

b) Der Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor v_1 erfüllt die Gleichung *(1 Punkt)*

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3\lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3\lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung folgt $\lambda_1 = 2$.

c) Die Eigenwerte sind die Nullstellen von $P_A(\lambda)$. *(1,5 Punkte)*

Wir haben in *b*) schon den Eigenwert λ_1 berechnet und es bleibt nun die weiteren Eigenwerte zu bestimmen. Die Polynomdivision von $P_A(\lambda)$ durch den Linear Faktor $(\lambda - 2)$ fürt zu

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + 3\lambda + 2).$$

Die Nullsetllen des quadratischen Polynoms $\lambda^2 + 3\lambda + 2$ sind

$$\lambda_2 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = -2$$

Die faktorisierte Form von $P_A(\lambda)$ ist *(0,5 Punkte)*

$$-(\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$

$$\operatorname{Eig}(A, 2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ *(1 Punkt)*

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}(A, -1) &= \mathbb{L}(A + E) \\ &= \mathbb{L}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{L}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_3 = -2$ *(1 Punkt)*

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}(A, -2) &= \mathbb{L}(A + 2E) \\ &= \mathbb{L}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{L}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix A ist diagonalisierbar, weil die Eingenwerte alle alg. Vielfachheit Eins haben. *(0,5+0,5 Punkte)*

d) Die Determinate von B ist *(1 Punkt)*

$$\det(B) = \det(A - 3E) = P_A(3) = -20.$$

Die lineare Abbildung $\mathcal{L}_B$ ist surjektiv: *(0,5+0,5 Punkte)*

$$\det(B) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Rang}(B) = 3 \Rightarrow \mathrm{Bild}(\mathcal{L}_B) = \mathbb{R}^3.$$