KLAUSUR

Mathematik II für Mechatroniker

01. 09. 2005

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. **(16 P)** Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

   Bestimmen Sie hieraus die Eigenvektoren der Matrix A und geben Sie eine Matrix B an mit: $B^{-1} A B = D = 4 \times 4$-Diagonalmatrix. Testen Sie das Resultat durch Überprüfung der Beziehung $A B = B D$.
   (Zwischenergebnis $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 3)^3$.)

2. **(7P)** Man berechne:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \, .$$

3. **(9P)** Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = 3 + (2x - 3y - 1)^2 + 2(x - 3y + 2)^2$$

   für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und überprüfen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt. Welche Ungleichung ergibt sich aus Ihren Berechnungen für f?

   Welche Gestalt haben die Höhenlinien $f(x, y) = \text{const}$? Um dies festzustellen, berechnen Sie die Eigenwerte der zu der quadratischen Form gehörigen Matrix.

Lösungen

1.) Mit dem Gauß-Algorithmus bringt man die Matrix $A - \lambda E$ in Dreiecksform und kann dann die Determinante als Produkt der Diagonalelemente ablesen. Man erhält so das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^4 + 8\,\lambda^3 + 18\,\lambda^2 - 27$.

Abspalten des Faktors $\lambda - 1$ (da $\lambda = 1$ Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist) sowie des Faktors $\lambda + 3$ (da $\lambda = -3$ Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist) und der pq-Formel liefert schließlich $\chi_a(\lambda) = (\lambda - 1)\,(\lambda + 3)^3$.

Die Eigenwerte sind offenbar $\lambda_1 = 1$ (einfach) und $\lambda_2 = -3$ (dreifach). Die Matrix A ist symmetrisch, also hat der Eigenraum von $\lambda_1 = 1$ die Dimension 1 und der von $\lambda_2 = -3$ die Dimension 3. Wir geben Basen der Eigenräume an.

$$(A - E) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

Man sieht sofort $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$ ist ein Eigenvektor.

$$(A + 3\,E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Man sieht sofort, $\vec{v_1} = (-1, 0, 0, 1)$, $\vec{v_2} = (0, -1, 0, 1)$, $\vec{v_3} = (0, 0, -1, 1)$, sind linear unabhängige Eigenvektoren. Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

welche die Eigenvektoren als Spaltenvektoren enthält, erfüllt dann die Beziehung

$$B^{-1}\,A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

Eine Überprüfung zeigt, dass

$$A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = B\,D\,.$$

2.) Für die ersten partiellen Ableitungen erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

und daraus:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} - \frac{x_j^2}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3}}\,.$$

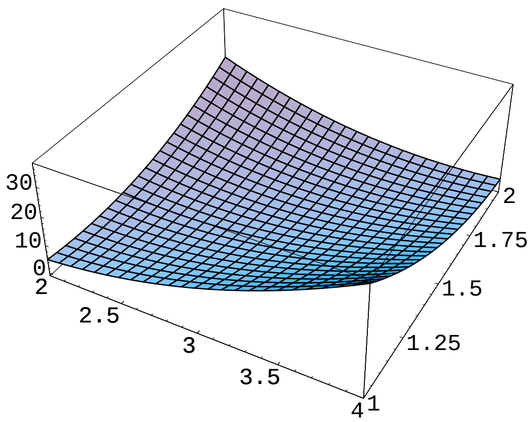
Bilden wir nun die Summe, so folgt:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\\ &= \frac{3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} - \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3}} = \frac{2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\,.\end{aligned}$$

3.) Ausmultipliziert ist $f(x,y) = 6x^2 - 24xy + 27y^2 + 4x - 18y + 12$.
Nullsetzen des Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x - 24y + 4 \\ -24x + 54y - 18 \end{pmatrix}$$

liefert ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung $x = 3$ und $y = \frac{5}{3}$. Wegen $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 72$ und $f_{xx} = 12 > 0$ handelt es sich um ein (globales) Minimum mit $f(3,\frac{5}{3}) = 3$. Also gilt $f(x,y) \geqq 3$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Das erkennt man (aufgrund der Quadrate) aber auch bereits an der ursprünglichen Darstellung von f.



Der Graph der Funktion $f(x,y) = 3 + (2x-3y-1)^2 + 2(x-3y+2)^2$

Die zu f gehörige symmetrische Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 27 \end{pmatrix} .$$

Das charakteristische Polynom ergibt sich zu $\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \lambda^2 - 33\lambda + 18$ und hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2}\left(11 \pm \sqrt{113}\right)$. Da beide Eigenwerte $\lambda_1 \approx 32{,}4452$ bzw. $\lambda_2 \approx 0{,}554781$ positiv sind, handelt es sich bei den Höhenlinien um Ellipsen.