KLAUSUR

Mathematik II (Informatiker)

13.9.2006

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 14 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an!
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wird festgelegt durch folgende Vorgaben:

$$f(1,0,0) = (2,-1)\,, \quad f(0,1,0) = (-2,1)\,, \quad f(0,0,1) = (0,0)\,.$$

(a) Wie lautet die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$?
(b) Geben Sie eine Basis des Kerns (Nullraums) von f.
(c) Wie lautet die Matrix von f bezüglich der Basis $\vec{\tilde{b}}_1 = (1,0,0)$, $\vec{\tilde{b}}_2 = (1,2,0)$, $\vec{\tilde{b}}_3 = (3,2,1)$ im $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^2$? (Angabe der Matrix in Produktform genügt).

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}\,, \quad a,b,c \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A durch Entwickeln nach der zweiten Zeile.
(b) Kann man a, b, c so wählen, dass die Zeilenvektoren

$$\vec{z}_1 = (a,1,1)\,, \quad \vec{z}_2 = (1,b,1)\,, \quad \vec{z}_3 = (1,1,c)\,,$$

paarweise senkrecht stehen: $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = 0$, $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_3 = 0$, $\vec{z}_2 \cdot \vec{z}_3 = 0$?
(c) Wie groß ist der Rang von A im Fall $a = 1$?

3. Wie lautet das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}?$$

Berechnen Sie die Potenzen A^n, $(n \in \mathbb{N})$.

Lösungen

1) (a) Die Matrix von f lautet:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

(b) Das System

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt die Lösung:

$$(\lambda_2, \lambda_2, \lambda_3) , \quad \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} .$$

Wir geben folgende Basis:

$$(1, 1, 0) , \quad (0, 0, 1) .$$

(c) Die Matrix bezüglich der neuen Basis im $\mathbb{R}^3$ lautet:

$$\tilde{M}(f) = M(f) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

2) (a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} &= (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} + b \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} + (-1) \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -(c-1) + b\,(a\,c - 1) - (a-1) = 2 - a - b - c + a\,b\,c . \end{aligned}$$

(b) Die Bedingungen $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = 0$, $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_3 = 0$, $\vec{z}_2 \cdot \vec{z}_3 = 0$, nehmen folgende Gestalt an:

$$a + b + 1 = 0 , \quad a + 1 + c = 0 , \quad 1 + b + c = 0 ,$$

bzw.

$$a + b = -1 , \quad a + c = -1 , \quad b + c = -1 .$$

Dieses System ist eindeutig lösbar:

$$a = b = c = -\frac{1}{2} .$$

(c) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}, \quad b, c \in \mathbb{R},$$

wird ranggleich umgeformt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}.$$

Der Rang beträgt 3 für $b \neq 1$ und $c \neq 1$. (Vgl. $\det(A) = 1 - b - c + b\,c = (b-1)\,(c-1) \neq 0$).
Der Rang beträgt 2 für $b \neq 1$ und $c = 1$ oder $b = 1$ und $c \neq 1$.
Der Rang beträgt 1 für $b = 1$ und $c = 1$.

3) Die Matrix A besitzt das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda\, E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\,(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 3\,\lambda\,.$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt:

$$A^2 - 3\,A = O\,,$$

bzw.

$$A^2 = 3\,A\,.$$

Wir bekommen also:

$$A^1 = A\,, \quad A^2 = 3\,A\,, \quad A^3 = 3\,A^2 = 3^2\,A\,, \quad A^4 = 3^2\,A^2 = 3^3\,A\,, \quad \ldots, A^n = 3^{n-1}\,A\,.$$