KLAUSUR

Mathematische Methoden der Signalverarbeitung

17.3.03

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben
und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Mithilfe der z-Transformation berechne man die Lösung der Differenzengleichung

$$f_{n+3} - 3\, f_{n+2} + 3\, f_{n+1} - f_n = 0\,, \quad f_0 = 0\,, f_1 = 1\,, f_2 = 4\,.$$

(4P)

2. Ein LTI-System

$$u(n) \xrightarrow{h(n)} y(n)$$

besitze die Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n\, z^{-n}\,, \quad 0 \leq r < |z| < R\,,$$

wobei $r < 1 < R$. Man zeige: Auf eine beschränkte Eingabefolge $|u_n| \leq M$ antwortet das System mit einer beschränkten Ausgabefolge y_n.
(6P)

3. Seien f und h Funktionen mit:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)\, h\left(\frac{1}{n}\, t\right) \right| \, dt < \infty\,, \quad \text{für alle}\, n \in \mathbb{N}\,,$$

und $h(0) = 0$. Man gebe eine Begründung dafür, dass für eine Testfunktion $\phi(t)$ mit der Fouriertransformierten $\Phi(\omega)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, h\left(\frac{1}{n}\, \omega\right)\, \Phi(\omega)\, d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, \Phi(\omega)\, d\omega\,.$$

Was ergibt sich für $f(t) = 1$ und $h(t) = e^{-|t|}$?
(8P)

Lösungen

1.) Mit dem Verschiebungssatz und $\mathcal{Z}(f_n)(z)$:

$$\mathcal{Z}(f_{n+l})(z) = z^l\,\mathcal{Z}(f_n)(z) - \sum_{\nu=0}^{l-1} \nu^2\, z^{l-\nu}\,, \quad l = 1, 2, 3,$$

ergibt sich im Bildbereich:

$$z^3\,\mathcal{Z}(f_n)(z) - z^2 - 4\,z - 3\,(z^2\,\mathcal{Z}(f_n)(z) - z) + 3\,z\,\mathcal{Z}(f_n)(z) - \mathcal{Z}(f_n)(z) = 0$$

bzw.

$$\mathcal{Z}(f_n)(z) = \frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}\,, \quad |z| > 1\,.$$

Partialbruchzerlegung ergibt zunächst:

$$\frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{1}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3}\,.$$

Mit der Rücktranformation von Polen folgt:

$$\frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3} = \mathcal{Z}\,(f_n)\,(z)\,,$$

wobei

$$f_n = \binom{n-1}{0} + 3\,\binom{n-1}{1} + 2\,\binom{n-1}{2}\,.$$

Für $n > 3$ gilt:

$$f_n = 1 + 3\,(n-1) + (n-1)\,(n-2) = n^2\,.$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0\,, \\ f_1 &= \binom{0}{0} = 1\,, \\ f_2 &= \binom{1}{0} + 3\,\binom{1}{1} = 4\,, \\ f_3 &= \binom{2}{0} + 3\,\binom{2}{1} + 2\,\binom{2}{2} = 9\,. \end{aligned}$$

2.) Im Zeitbereich haben folgende Übertragung:

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu \, u_{n-\nu} \, .$$

Hieraus folgt:

$$|y_n| \leq \sum_{\nu=0}^{n} |h_\nu| \, |u_{n-\nu}| \leq M \sum_{\nu=0}^{n} |h_\nu| \, .$$

Die Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \, z^{-n}$$

konvergiert im Gebiet $r < |z| < R$ absolut. Wegen $r < 1 < R$ liegt $z = 1$ im Konvergenzgebiet

$$C = \sum_{\nu=0}^{n} |h_\nu| < \infty \, .$$

Also gilt für alle n die Abschätzung:

$$|y_n| \leq C \, M \, .$$

3.) Sei $f(t)$ absolut integrierbar, $h(t)$, $\phi(t)$ seien Testfunktionen. Die Fouriertransformierte von $\phi(t)$ sei $\Phi(\omega)$. Die Delta-Funktion ergibt sich als Grenzwert regulärer Distributionen. Dies führt auf folgende Überlegung:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n \, f(n\,\omega) \, \Phi(n\,\omega) \, h(\omega) \, d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \, \Phi(\omega) \, d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) \, h(\omega) \, d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \, \Phi(\omega) \, d\omega \; h(0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \, \Phi(\omega) \, d\omega \\
&= \mathcal{F}(T_f)(\phi) \, .
\end{aligned}$$

Mit einer einfachen Substitution erhält man:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, h\left(\frac{1}{n}\,\omega\right)\, \Phi(\omega)\, d\omega = \mathcal{F}(T_f)(\phi)$$

bzw. in Kurzform:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}\left(f(t)\, h\left(\frac{1}{n}\,t\right)\right)(\omega) = \mathcal{F}(f(t))(\omega)\,.$$

Im konkreten Fall ergibt sich dem Fourier-Integraltheorem:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{n}\,|\omega|}\, \Phi(\omega)\, d\omega &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{i\,\omega\,0}\, d\omega \\ &= \sqrt{2\,\pi}\,\phi(0) = \sqrt{2\,\pi}\, \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\,\phi(\omega)\, d\omega \end{aligned}$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{1}{n}\,|t|}\right)(\omega) = \sqrt{2\,\pi}\,\delta(\omega)\,.$$