

KLAUSUR

Mathematik I/II für Elektrotechniker

11. September 2002

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr.:
-------	----------	------------

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben
und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sind 27 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)	6)
----	----	----	----	----	----

Punkte:	Note:
---------	-------

1. **(10P)** Sei A die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom sowie alle Eigenwerte von A und geben sie für jeden Eigenwert den zugehörigen Eigenraum in möglichst einfacher Form an (ganzzahlig).

(Zwischenergebnis: $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$).

(b) Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, finden Sie eine reguläre reelle Matrix B derart, dass $B^{-1}AB$ Diagonalgestalt hat.

2. **(8P)** Sei A die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Führen Sie am Beispiel der Matrix A den Gaußalgorithmus zur Berechnung der inversen Matrix A^{-1} vor.

(b) Berechnen Sie alle Lösungen \vec{v} der Gleichung $A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. (a) **(4P)** Man bestimme den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ der Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sqrt{n^4 + n^2} - n^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

(b) Man bestimme die Grenzwerte

(i): **(4P)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{\sin^2 x},$

(ii): **(4P)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{x^3}.$

Geben Sie jeweils den Lösungsweg an!

4. **(10P)** (a) Mittels vollständiger Induktion weise man nach: Für die Integrale

$$I_n := \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt

$$I_n = \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2 n!} \left(\frac{1}{4}\right)^n .$$

(Hinweis: Partielle Integration mit $v'(x) = x e^{-x^2}$.)

(b) Mit Hilfe von (a) bestimme man das Integral

$$J := \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx .$$

(Anleitung: Man verwende die Taylorreihe von $\cos x$ (um $x_0 = 0$), integriere summandenweise und berechne mit (a) den Wert der entstehenden Taylorreihe.)

5. **(8P)** Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = 2 + (2x - y - 1)^2 + 2(x - y + 2)^2$$

für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und überprüfen Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

Welche Gestalt haben die Höhenlinien $f(x, y) = \text{const}$?

6. **(7P)** Man bestimme den Wert des Integrals

$$\int_K \frac{xyz}{x^2 + y^2} d(x, y, z) ,$$

wobei K die folgende Achtelkugel um den Ursprung mit Radius $R = 3$ sei:

$$K := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x, y, z \geq 0\} .$$

Lösungen:

1. (a)

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2 - \lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Mit der Regel von Sarrus bestimmt sich diese Determinante zu

$$(-\lambda)(-2 - \lambda)(3 - \lambda) + 6 + 6 - (-\lambda)3(-2) - (-1)(-3)(3 - \lambda) - 1(-2 - \lambda)(-2),$$

Ausmultiplizieren und Vereinfachen ergibt

$$(2\lambda + \lambda^2)(3 - \lambda) + 12 - 6\lambda - 9 + 3\lambda - 4 - 2\lambda = 6\lambda - 2\lambda^2 + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 1 - 5\lambda,$$

und schließlich

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1.$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$. Durch Einsetzen sieht man sofort eine Nullstelle $\lambda = 1$. Polynomdivision durch den Linearfaktor $(\lambda - 1)$:

$$\begin{array}{r} -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 : \lambda - 1 = -\lambda^2 + 1 \\ \underline{-\lambda^3 + \lambda^2} \\ 0 + \lambda - 1 \\ \underline{+ \lambda - 1} \\ 0 \end{array}$$

führt zu

$$\chi_A(\lambda) = (-\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) \stackrel{\text{bin. Formel}}{=} -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 1) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Also haben wir den Eigenwert $\lambda_1 = -1$ der algebraischen Vielfachheit 1 und den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ der algebraischen Vielfachheit 2.

Nun können wir die Eigenräume bestimmen, der zum Eigenwert -1 ist notwendig eindimensional, der Eigenraum zu 1 kann ein- oder zweidimensional sein.

$\lambda = -1$: Der Eigenraum ist hier die Lösungsmenge der Vektorgleichung:

$$(A - (-1)E) \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}. \text{ Eine Gaußelimination}$$

$$\text{ergibt: } \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Die dritte Zeile ist redund-}$$

dant, aus der zweiten ergibt sich $v_2 = \frac{3}{2}v_3$ mit beliebigem v_3 , und damit aus

der ersten: $v_1 = \frac{3}{2}v_3 - v_3 = \frac{1}{2}v_3$. Den ganzzahligen Basisvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ des Eigenraumes erhalten mit der Wahl $v_3 = 2$.

$\lambda = 1$: Der Eigenraum ist hier die Lösungsmenge der Vektorgleichung:

$$(A - 1E)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}. \text{ Eine Gau\sselimination er}$$

$$\text{gibt: } \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Nur die erste Zeile ist relevant,}$$

v_2, v_3 sind beliebig und legen v_1 zu $v_2 - v_3$ fest. Der Eigenraum ist hier also zweidimensional. Um kleine, positive ganze Eintr\u00e4ge zu erhalten, w\u00e4hlen wir $v_2 = 1$ und $v_3 \in \{0, 1\}$ und erhalten die ganzzahligen Basisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Im ersten Teil haben wir gesehen, dass algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte \u00fcbereinstimmen. Daher ist A diagonalisierbar, und die diagonalisierende Matrix B ergibt sich durch Aneinanderreihen der im ersten Teil gefundenen Basisvektoren:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Zun\u00e4chst wird die Matrix um die Einheitsmatrix erweitert und dann mit elementaren Zeilenoperationen der linke Teil in die Einheitsmatrix \u00fcbef\u00fchrt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \text{ Die ersten zwei Zeilen werden vertauscht:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \text{ nun von der dritten die erste Zeile subtrahiert:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right), \text{ und von der dritten die zweite:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$
, schließlich von der ersten die dritte Zeile abgezogen und zur zweiten das Doppelte der dritten Zeile addiert:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$
. Auf der rechten Seite steht nun A^{-1} .

(b) $A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eindeutig bestimmt.

3. (a)

$$a_n = \frac{\sqrt{n^4 + n^2} - n^2}{\sqrt{n^4 + n^2} + n^2} = \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n^2} + n^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

(b) i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots}{\left(x - \frac{x^3}{6} \pm \dots\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + \dots}{\left(1 - \frac{x^2}{6} \pm \dots\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} \pm \dots\right)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Oder alternativ unter 3-maliger Anwendung der L'Hospitalschen Regel:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3} + \sin x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}^5} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}^3} + \cos x}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4. (a) $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ trifft zu (vgl. Aufgabe A30).

Angenommen, die Behauptung trifft zu für ein bestimmtes n :

$$I_n = \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} &= \int_0^{\infty} x^{2n+2} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} x^{2n+1} x e^{-x^2} dx \\
 &= x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x^2} \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^{\infty} (2n+1)x^{2n} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x^2} dx \\
 &= 0 + \frac{2n+1}{2} \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \\
 &= \frac{(2n+1)}{2} \cdot \frac{(2n+2)}{2(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2 n!} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
 &= \frac{\sqrt{\pi} (2n+2)!}{2 (n+1)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Dies ist aber die Behauptung, formuliert für $n+1$ anstelle von n .

(b)

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2 n!} \left(\frac{1}{4}\right)^n && \text{(wegen (a))} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}}.
 \end{aligned}$$

5. Es ist $f(x, y) = 6x^2 - 8xy + 3y^2 + 4x - 6y + 11$, also sind die Höhenlinien wegen $B^2 - 4AC = -32 < 0$ Ellipsen.

Nullsetzen des Gradienten

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x - 8y + 4 \\ -8x + 6y - 6 \end{pmatrix}$$

liefert ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung $x = 3$ und $y = 5$. Wegen $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 8$ handelt es sich um ein Minimum mit $f(3, 5) = 2$. Also gilt $f(x, y) \geq 2$.

6. Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $r \in [0, 3]$; Funktionaldeterminante $= r^2 \sin \vartheta$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_K \frac{xyz}{x^2 + y^2} d(x, y, z) &= \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3 \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \vartheta \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \cdot r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^3 r^3 \, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \\ &= \frac{3^4}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{16}. \end{aligned}$$