KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker

20. Februar 2003

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben
und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sind 14 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. **(5P)** Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{x}{x^2+1}\, y \,, \\ y(0) &= 1 \,. \end{aligned}$$

   Man skizziere diese Lösung.

2. **(8P)** Gegeben sei das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) + y_2(x) \,. \end{aligned}$$

   Man bestimme die allgemeine Lösung des Systems.

3. **(7P)** Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + 2\, y'(x) - 3\, y(x) = \cos(2x) \,.$$

   Bestimmen Sie die Lösung mit den Anfangswerten

$$y(0) = 1 \,, \quad y'(0) = 0 \,.$$

4. **(5P)** Überprüfen Sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \cos z$.

5. **(5P)** Berechnen Sie das Residuum von $f(z) = \cot z$ an der Stelle $z = 0$.

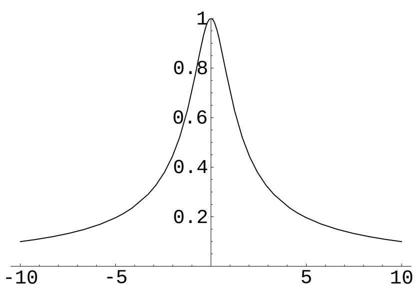
Lösungen:

1. Es liegt eine lineare homogene Differentialgleichung vor. Ihre allgemeine Lösung hat die Gestalt:

$$y(x) = c\,e^{-\int \frac{x}{x^2+1}\,dx} = c\,e^{-\frac{1}{2}\,\ln(x^2+1)} = \frac{c}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Die Gleichung $y(0) = 1$ liefert $c = 1$, also ist die gesuchte Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$



Die Lösung
$y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2. Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det(A - \lambda\,E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0\,.$$

Damit ergeben sich folgende Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1 + i\,, \quad \lambda_2 = 1 - i\,.$$

Wir suchen einen Eigenvektor zum Eigenwert λ_1:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Dieses homogene System besitzt einen Lösungsraum der Dimension eins. Eine Basislösung ergibt sich aus der ersten Gleichung:

$$-i\,x_1 + x_2 = 0\,.$$

(Die zweite Gleichung des Systems ist von der ersten linear abhängig und wird somit mit erfüllt). Setzen wir $x_1 = 1$, so ergibt sich $x_2 = i$. Eine komplexwertige Lösung des Differentialgleichungssystems lautet damit:

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+i)\,x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^x \,(\cos x + i\,\sin x)\,.$$

Um ein Fundamentalsystem aus zwei reellwertigen Lösungen zu bekommen, bestimmen wir Real- und Imaginärteil von $\vec{y}(x)$:

$$y_1(x) = \text{Re}\,\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} \cos(x)\,e^x \\ -\sin(x)\,e^x \end{pmatrix}\,,$$

$$y_2(x) = \text{Im}\,\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} \sin(x)\,e^x \\ \cos(x)\,e^x \end{pmatrix}\,,$$

also ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{y}(x) \;=\; c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x) = \begin{pmatrix} c_1\,\cos(x)\,e^x + c_2\,\sin(x)\,e^x \\ -c_1\,\sin(x)\,e^x + c_2\,\cos(x)\,e^x \end{pmatrix}$$

3. Wir lesen das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda - 3$$

ab, welches die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1\,, \qquad \lambda_2 = -3$$

besitzt. Dies liefert die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y_1(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^{-3x}\,.$$

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, setzen wir den Ansatz

$$y_2(x) = A\,\cos(2x) + B\,\sin(2x)$$

in die Differentialgleichung ein und erhalten wegen

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= -2A\,\sin(2x) + 2B\,\cos(2x) \\ y_2''(x) &= -4A\,\cos(2x) - 4B\,\sin(2x) \end{aligned}$$

die Gleichung

$$-4A\,\cos(2x) - 4B\,\sin(2x) + 2(-2A\,\sin(2x) + 2B\,\cos(2x))$$
$$-3(A\,\cos(2x) + B\,\sin(2x)) = \cos(2x)\ .$$

Sortieren nach den linear unabhängigen Funktionen $\sin(2x)$ und $\cos(2x)$ und Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -4A - 7B &= 0 \\ -7A + 4B &= 1 \end{aligned}$$

mit der Lösung $A = -\frac{7}{65}$ und $B = \frac{4}{65}$. Um c_1 und c_2 zu bestimmen, setzt man die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^{-3x} - \frac{7}{65}\,\cos(2x) + \frac{4}{65}\,\sin(2x)$$

in die Anfangsbedingungen ein und erhält schließlich die eindeutige Lösung

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{4}{5}\,e^x + \frac{4}{13}\,e^{-3x} - \frac{7}{65}\,\cos(2x) + \frac{4}{65}\,\sin(2x)\ .$$

4. Wir rechnen

$$f(z) = \cos(x+iy) = \cos x\cos(iy) - \sin x\sin(iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y\ .$$

Für Real- und Imaginärteil erhalten wir also

$$u(x,y) = \cos x\cosh y \qquad \text{und} \qquad v(x,y) = -\sin x\sinh y\ .$$

Also ist

$$u_x(x,y) = -\sin x\cosh y = v_y(x,y)$$

und

$$u_y(x,y) = \cos x\sinh y = -v_x(x,y)\ .$$

5. Wir entwickeln $\cot z$ in eine Laurentreihe

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \cdots}{z - \frac{z^3}{6} + \cdots} = \frac{1}{z}\left(\frac{1 - \frac{z^2}{2} + \cdots}{1 - \frac{z^2}{6} + \cdots}\right) = \frac{1}{z} + \ldots$$

und lesen ab

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \cot z = a_{-1} = 1\ .$$