KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker

20. Februar 2003

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sind 14 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. **(5P)** Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{x}{x^2+1}\, y \,, \\ y(0) &= 1 \,. \end{aligned}$$

   Man skizziere diese Lösung.

2. **(7P)** Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + 2\, y'(x) - 3\, y(x) = \cos(2x) \,.$$

   Bestimmen Sie die Lösung mit den Anfangswerten

$$y(0) = 1 \,, \quad y'(0) = 0 \,.$$

3. **(8P)** Gegeben sei das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) + y_2(x) \,. \end{aligned}$$

   Man bestimme die allgemeine Lösung des Systems mit Eigenwerten und Eigenvektoren.

4. **(6P)** Man bestimme die allgemeine Lösung für das System

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 2y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) + 2y_2(x) \end{aligned}$$

   mit der Matrixexponentialfunktion.

5. **(4P)** Man bestimme eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

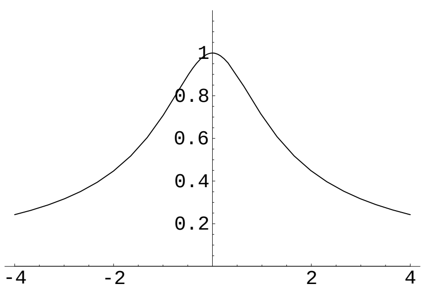
$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 2\, y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) + 2\, y_2(x) \; + e^{2x} \,. \end{aligned}$$

Lösungen:
1. Es liegt eine lineare homogene Differentialgleichung vor. Ihre allgemeine Lösung hat die Gestalt:

$$y(x) = c\, e^{-\int \frac{x}{x^2+1}\, dx} = c\, e^{-\frac{1}{2}\, \ln(x^2+1)} = \frac{c}{\sqrt{x^2+1}} \, .$$

Die Gleichung $y(0) = 1$ liefert $c = 1$, also ist die gesuchte Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, .$$



Die Lösung
$y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2. Wir lesen das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda - 3$$

ab, welches die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1 \, , \qquad \lambda_2 = -3$$

besitzt. Dies liefert die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y_1(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-3x} \, .$$

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, setzen wir den Ansatz

$$y_2(x) = A\, e^{2ix}$$

in die Differentialgleichung ein und erhalten wegen

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= 2\,A\,i\,e^{2ix} \\ y_2''(x) &= -4\,A\,e^{2ix} \end{aligned}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} (-4+4i-3)\,A &= 1\,, \quad \text{also} \\ (-7+4i)\,A &= 1 \end{aligned}$$

mit der Lösung $A = -\frac{7}{65} - \frac{4}{65}\,i$. Eine spezielle Lösung ergibt sich zu:

$$y_2\,(x) = Re\,(A\,e^{2ix}) = -\frac{7}{65}\,\cos(2x) + \frac{4}{65}\,\sin(2x)\,.$$

Um c_1 und c_2 zu bestimmen, setzt man die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^{-3x} - \frac{7}{65}\,\cos^2 x + \frac{4}{65}\,\sin^2 x$$

in die Anfangsbedingungen ein und erhält schließlich die eindeutige Lösung

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{4}{5}\,e^x + \frac{4}{13}\,e^{-3x} - \frac{7}{65}\,\cos x + \frac{4}{65}\,\sin x\,.$$

3. Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det(A - \lambda\,E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0\,.$$

Damit ergeben sich folgende Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1 + i\,, \quad \lambda_2 = 1 - i\,.$$

Wir suchen einen Eigenvektor zum Eigenwert λ_1:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Dieses homogene System besitzt einen Lösungsraum der Dimension eins. Eine Basislösung ergibt sich aus der ersten Gleichung:

$$-i\,x_1 + x_2 = 0\,.$$

(Die zweite Gleichung des Systems ist von der ersten linear abhängig und wird mit erfüllt). Setzen wir $x_1 = 1$, so ergibt sich $x_2 = i$. Eine komplexwertige Lösung des Differentialgleichungssystems lautet damit:

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+i)\,x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^x \left(\cos x + i \, \sin x\right).$$

Um ein Fundamentalsystem aus zwei reellwertigen Lösungen zu bekommen, bestimmen wir Real- und Imaginärteil von $\vec{y}(x)$:

$$y_1(x) = \text{Re}\, \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} \cos(x)\, e^x \\ -\sin(x)\, e^x \end{pmatrix} ,$$

$$y_2(x) = \text{Im}\, \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} \sin(x)\, e^x \\ \cos(x)\, e^x \end{pmatrix} ,$$

also ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{y}(x) \quad = \quad c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) = \begin{pmatrix} c_1 \, \cos(x)\, e^x + c_2 \, \sin(x)\, e^x \\ -c_1 \, \sin(x)\, e^x + c_2 \, \cos(x)\, e^x \end{pmatrix}$$

4. Wir schreiben das System in Matrixform

$$Y' = A\, Y \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} , \; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2E + \widetilde{A}$$

ergibt sich

$$e^{Ax} \;=\; e^{E2x}\, e^{\widetilde{A}x} \;=\; E\, e^{2x} \cdot \, e^{\widetilde{A}x} \;=\; e^{2x}\, e^{\widetilde{A}x} \, .$$

Wegen $\widetilde{A}\,\widetilde{A} = -E$ bekommen wir:

$$\begin{aligned}
e^{\widetilde{A}x} &= E + \widetilde{A}\,x - E\,\frac{x^2}{2!} - \widetilde{A}\,\frac{x^3}{3!} + E\,\frac{x^4}{4!}\,\cdots \\
&= E\,(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots) \\
&\quad + \widetilde{A}\,(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots) \\
&= E\cos(x) + \widetilde{A}\sin(x)\ .
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
e^{Ax} &= E\,e^{2x}\cos(x) + \widetilde{A}\,e^{2x}\sin(x) \\
&= \begin{pmatrix} e^{2x}\cos(x) & e^{2x}\sin(x) \\ -e^{2x}\sin(x) & e^{2x}\cos(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = e^{Ax}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\ .$$

5. Wir machen den Ansatz:

$$Y_p\,(x) = e^{Ax}\;C(x) = e^{Ax}\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$$

und bekommen

$$Y_p'(x) = A\;e^{Ax}\;C(x) + e^{Ax}\;C'(x)\ .$$

Einsetzen in

$$Y' = A\;Y + R(x)\ ,\ R(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}\ ,$$

ergibt:

$$e^{Ax}\;C'(x) = R(x)\ .$$

Also

$$C'(x) = e^{-Ax}\;R(x)$$

mit

$$e^{-Ax} = \begin{pmatrix} e^{-2x}\cos(x) & -e^{-2x}\sin(x) \\ e^{-2x}\sin(x) & e^{-2x}\cos(x) \end{pmatrix}\ .$$

Hieraus folgt:

$$C(x) = \int e^{-Ax} \; R(x) \; dx = \int \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} .$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned} Y_p(x) &= \begin{pmatrix} e^{2x}\cos(x) & e^{2xs}\sin(x) \\ -e^{2x}\sin(x) & e^{2x}\cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2x}\big((\cos(x)\big)^2 - \big(\sin(x)\big)^2 \\ -2\, e^{2x} \sin(x)\cos(x) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$