KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker

28. Februar 2006

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sind 16 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. **(5P)** Lösen Sie für $x \in (-1, 1)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{(x-1)^2\, y}\,, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

   und skizzieren Sie die Lösung.

2. **(7P)** Die Ellipsenschar sei durch die Gleichung

$$x^2 + \frac{y^2}{A} = 1 \quad (A > 0)$$

   gegeben. Bestimmen Sie die Gleichung der zugehörigen Orthogonaltrajektorien. Skizzieren Sie die beiden Kurvenscharen.

3. **(8P)** Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = \sin x\ .$$

   Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$.

4. **(8P)** Überprüfen Sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \cos(z^2)$. Hinweis: Es gelten die Formeln

$$\cos(iz) = \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad \text{und} \quad \sin(iz) = i \sinh z = \frac{i}{2}(e^z - e^{-z})\ .$$

5. **(6P)** Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1+z}{3z^2 - z^3}\, \mathrm{dz}$$

   wobei der Kreis $\{z; |z| = 2\}$ einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werde.

Lösungen:

1. Bei der Differentialgleichung $y'(x) = \frac{1}{(x-1)^2\, y}$ lassen sich die Variablen trennen. Wir erhalten

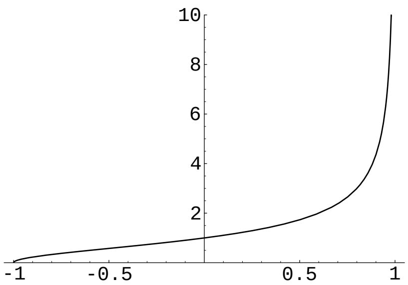
$$\int y\,dy = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx\ ,$$

also

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{x-1} + C\ .$$

Die Gleichung $y(0) = 1$ liefert $C = -\frac{1}{2}$, also ist die gesuchte Lösung

$$y(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,.$$



Die Lösung $y(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

2. Ableiten der Gleichung

$$x^2 + \frac{y^2}{A} = 1$$

der Ellipsenschar liefert

$$2x + \frac{2yy'}{A} = 0\ .$$

Wir müssen A eliminieren. Lösen wir beide Gleichungen nach A auf und setzen sie gleich erhalten wir

$$\frac{y^2}{1-x^2} = A = -\frac{y\,y'}{x}$$

und nach Auflösen nach y' somit

$$y'(x) = \frac{x\,y}{x^2-1}\ .$$

Die Orthogonaltrajektorien erfüllen also die Differentialgleichung

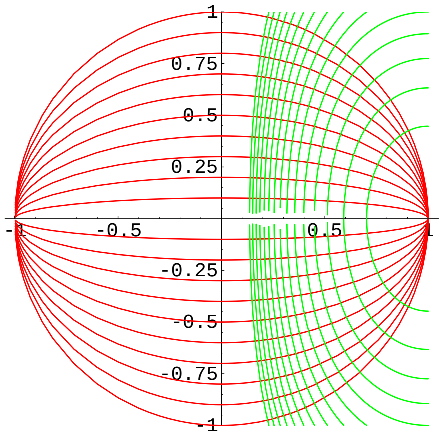
$$y'(x) = -\frac{x^2-1}{x\,y}\ .$$

Trennung der Variablen liefert

$$\int y\,dy = \int -\frac{x^2-1}{x}\,dx\ .$$

Dies liefert die Gleichung der zugehörigen Orthogonaltrajektorien

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \ln x + C\ .$$



Die Ellipsenschar und ihre Orthogonaltrajektorien

3. Die zu $y''(x)+y'(x)-2y(x) = \sin x$ gehörige homogene Differentialgleichung besitzt das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

ab, welches die Nullstellen

$$\lambda_1 = -2\ , \qquad \lambda_2 = 1$$

besitzt. Dies liefert die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y_1(x) = c_1\,e^{-2x} + c_2\,e^{x}\ .$$

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, setzen wir den Ansatz

$$y_2(x) = A\,\cos x + B\,\sin x$$

in die Differentialgleichung ein und erhalten wegen

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= -A\,\sin x + B\,\cos x \\ y_2''(x) &= -A\,\cos x - B\,\sin x \end{aligned}$$

die Gleichung

$$-A\,\cos x - B\,\sin x - A\,\sin x + B\,\cos x$$
$$-2(A\,\cos x + B\,\sin x) = \sin x\ .$$

Sortieren nach den linear unabhängigen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ und Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -3A + B &= 0 \\ -A - 3B &= 1 \end{aligned}$$

mit der Lösung $A = -\frac{1}{10}$ und $B = -\frac{3}{10}$. Um c_1 und c_2 zu bestimmen, setzt man die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c_1\,e^{-2x} + c_2\,e^{x} - \frac{1}{10}\,\cos x - \frac{3}{10}\,\sin x$$

in die Anfangsbedingungen ein und erhält die Gleichungen

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= \frac{1}{10} \\ -2c_1 + c_2 &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

mit der Lösung $c_1 = -\frac{1}{15}$ und $c_2 = \frac{1}{6}$. Dies liefert schließlich die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = -\frac{1}{15}\,e^{-2x} + \frac{1}{6}\,e^{x} - \frac{1}{10}\,\cos x - \frac{3}{10}\,\sin x\ .$$

4. Wir rechnen

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos(x+iy)^2 = \cos(x^2 - y^2 + 2ixy) \\ &= \cos(x^2 - y^2)\cos(2ixy) - \sin(x^2 - y^2)\sin(2ixy) \\ &= \cos(x^2 - y^2)\cosh(2xy) - i\sin(x^2 - y^2)\sinh(2xy)\ . \end{aligned}$$

Für Real- und Imaginärteil erhalten wir also

$$u(x,y) = \cos(x^2 - y^2)\cosh(2xy) \qquad \text{und} \qquad v(x,y) = -\sin(x^2 - y^2)\sinh(2xy)\ .$$

Also ist

$$u_x(x,y) = 2y\cos(x^2 - y^2)\sinh(2xy) - 2x\sin(x^2 - y^2)\cosh(2xy) = v_y(x,y)$$

und

$$u_y(x,y) = 2y\sin(x^2-y^2)\cosh(2xy) + 2x\cos(x^2-y^2)\sinh(2xy) = -v_x(x,y)\ .$$

5. Wir bestimmen eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{1+z}{3z^2-z^3} = \frac{1}{3z^2} + \frac{4}{9z} - \frac{4}{9(z-3)}$$

und lesen ab

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1+z}{3z^2-z^3} = a_{-1} = \frac{4}{9}\ .$$

Dies erhält man auch mit der Laurentreihenentwicklung

$$\begin{aligned} \frac{1+z}{3z^2-z^3} &= \frac{1+z}{3z^2} \cdot \frac{1}{1-z/3} \\ &= \frac{1+z}{3z^2}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \frac{z^3}{27} + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{3z^2} + \frac{4}{9z} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81}z + \ldots\ . \end{aligned}$$

Der Residuensatz liefert daher

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1+z}{3z^2-z^3}\,\mathrm{dz} = 2\pi\, i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1+z}{3z^2-z^3} = \frac{8\pi\, i}{9}\ .$$