Klausur Mathematik II

(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

11. März 2008

(Hans-Georg Rück)

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Betrachten Sie im $\mathbb{R}^2$ die folgenden Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

a) Zeigen Sie, dass $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei durch die folgende Festlegung gegeben:

$$f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 - 2\,\vec{v}_2 \; , \; f(\vec{v}_2) = \vec{v}_1 - 2\,\vec{v}_2 \, .$$

Berechnen Sie die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

c) Berechnen Sie eine Basis des Kerns von f und eine Basis des Bildes von f.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Für eine beliebige reelle Zahl α betrachte man die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A_α.

b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren von A_α.

c) Für welche reellen α ist A_α diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Gegeben seien im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} , \; \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} , \; \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Der Unterraum U werde von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannt, der Unterraum W von $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$.

a) Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(W)$.

b) Berechnen Sie eine Basis von $U \cap W$ *(Hinweis: $U \cap W \neq \{\vec{0}\}$)*.

Aufgabe 4 (8 Punkte):

Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x, y, z) = x^2 \sin(z) + x^2 y \, \cos(z) + x^3 + y^3$$

um den Punkt $(1, 0, \pi)$.

Aufgabe 5 (6 Punkte):

Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 - 4\,x^2 + \frac{1}{2}\,y^2 + xy + 7\,x + y - \frac{3}{2}\,.$$

Berechnen Sie alle lokalen Minima und Maxima von f.

Aufgabe 6 (6 Punkte):

Berechnen Sie das Volumen der folgenden Teilmenge D des $\mathbb{R}^3$,

$$D = \{(x, y, z) \mid \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\,;\; 0 \leq y \leq x\,;\; x\,\sin(y) - 1 \leq z \leq \cos(y) + x^3\}\,.$$

Lösungen:

1. a) Es reicht hier offensichtlich die lineare Unabhängigkeit zu überprüfen. Aus $\lambda\vec{v}_1+\mu\vec{v}_2=\vec{0}$ folgt sofort: $\lambda=0$ und $\mu=0$.

   b) <u>Naive Methode</u>:
   Sei $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   Löse nach a,b,c,d:

$$\begin{aligned}
a+2b &= -1, \\
c+2d &= -4, \\
a+3b &= -1, \\
c+3d &= -4.
\end{aligned}$$

   Man sieht sofort (oder mit dem Gauß-Algorthmus):

$$b=0,\ d=0,\ a=-1,\ c=-4,$$

   also $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.
   <u>Mit Übergangsmatrizen</u>:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   c) <u>Basis des Kerns</u>:

   Löse $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}$, also ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis vom Kern(f).

   <u>Basis des Bildes</u>:

   Das Bild hat die Dimension 1, also ist $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ eine Basis vom Bild(f).

2. a) Berechne zunächst das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned}
\chi(X) &= \det\begin{pmatrix} 1-\alpha-X & 0 & \alpha \\ 0 & 1-X & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha+1-X \end{pmatrix} \\
&= (1-X)\big((1-\alpha-X)(\alpha+1-X)+\alpha^2\big) \\
&= (1-X)\big((1-X)^2-\alpha^2+\alpha^2\big) = (1-X)^3.
\end{aligned}$$

   $\lambda=1$ ist der einzige Eigenwert.

   b) Eigenvektoren zum Eigenwert 1:

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha-1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fall 1:

Falls $\alpha \neq 0$, dann lässt sich die Matrix vereinfachen zu $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraumes.

Fall 2:
Falls $\alpha = 0$, dann ist die Matrix die Nullmatrix und eine Basis des Eigenraumes ist:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) A_α ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\alpha = 0$ ist. Dies folgt aus b) und der Tatsache, dass es zu einer diagonalisierbaren Abbildung stets eine Basis aus Eigenvektoren gibt und umgekehrt.

3. a) Man sieht sofort mit dem Gauß-Algorithmus, dass jeweils die beiden Erzeuger linear unabhängig sind. Also gilt $\dim_{\mathbb{R}}(U) = \dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$.

b) Sei $\vec{v} \in U \cap W$, dann ergibt der Ansatz

$$\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein lineares Gleichungssystem in λ, μ, α und β mit der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei β beliebig. Dann ist die Lösung $\alpha = -\beta, \mu = \beta, \lambda = -\beta$. Also ist $\vec{v} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $U \cap W$.

4. Berechne die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x\sin(z) + 2xy\cos(z) + 3x^2,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2\cos(z) + 3y^2,\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= x^2\cos(z) - x^2 y\sin(z),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x} &= 2\sin(z) + 2y\cos(z) + 6x,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= 2x\cos(z),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} &= 2x\cos(z) - 2xy\sin(z),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= 2x\cos(z),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y} &= 6y,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} &= -x^2\sin(z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} &= 2x\cos(z) - 2xy\sin(z),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} &= -x^2\sin(z),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial z} &= -x^2\sin(z) - x^2 y\cos(z).
\end{aligned}$$

Das gesuchte Taylorpolynom lautet also

$$\begin{aligned}
T_2\big(f,(1,0,\pi)\big) &= 1 + 3(x-1) + (-1)y + (-1)(z-\pi)\\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(6(x-1)^2 + (-2)(x-1)y + (-2)(x-1)(z-\pi)\\
&\quad + (-2)y(x-1) + 0y^2 + 0y(z-\pi) + (-2)(z-\pi)(x-1)\\
&\quad + 0(z-\pi)y + 0(z-\pi)^2\Big)\\
&= 1 + 3(x-1) - y - (z-\pi) + \frac{1}{2}\Big(6(x-1)^2 - 4(x-1)y - 4(x-1)(z-\pi)\Big)\\
&= 1 + 3(x-1) - y - (z-\pi) + 3(x-1)^2 - 2(x-1)y - 2(x-1)(z-\pi).
\end{aligned}$$

5. Die partiellen Ableitungen von f lauten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 8x + y + 7, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y + x + 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x} = 6x - 8,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y} = 1.$$

Die notwendige Bedingung lautet

$$\mathrm{grad} f = (3x^2 - 8x + y + 7, y + x + 1) = (0,0).$$

Also $y = -x - 1$ und somit $3x^2 - 8x - x - 1 + 7 = 3x^2 - 9x + 6 = 0$. Die Lösungen dieser guadratischen Gleichung lauten $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$. Es kommen also die Punkte $(2,-3)$ und $(1,-2)$ als lokale Extrema infrage.

Die Hessematrix lautet
$$\begin{pmatrix} 6x-8 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Die Hessematrix ausgewertet bei $(2,-3)$:
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Da $\det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 > 0$ und $4 > 0$ ist, liegt ein lokales Minimum bei $(2,-3)$ vor.
Die Hessematrix ausgewertet bei $(1,-2)$:
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Wegen $\det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -3 < 0$ liegt bei $(1,-2)$ keine Extremalstelle vor.

6. Wir rechnen:
$$\begin{aligned}
V(D) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^x \int_{x\sin(y)-1}^{\cos(y)+x^3} 1\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^x \big(\cos(y) + x^3 - x\sin(y) + 1\big) dy\, dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Big[\sin(y) + x^3 y + x\cos(y) + y\Big]_0^x d\,x \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \big(\sin(x) + x^4 + x\cos(x) + x - x\big) d\,x \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \big(\sin(x) + x^4 + x\cos(x)\big) d\,x \\
&\overset{(*)}{=} \Big[-\cos(x) + \frac{1}{5}x^5 + x\sin(x) + \cos(x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \Big[\frac{1}{5}x^5 + x\sin(x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{5}\pi^5 - \frac{1}{5}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^5 - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Es wurde in $(*)$ verwendet, dass $x\sin(x) + \cos(x)$ eine Stammfunktion von $x\cos(x)$ ist, wie man schnell durch partielle Integration sieht.