Klausur Mathematik II

(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

13. September 2007

(Hans-Georg Rück)

Aufgabe 1 (7 Punkte):

Wie üblich seien

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^3$.
Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die folgende Festlegung gegeben:

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3 \;,\; f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - 4\,\vec{e}_3 \;,\; f(\vec{e}_3) = 2\,\vec{e}_1 - 5\,\vec{e}_2 + 9\,\vec{e}_3 .$$

a) Berechnen Sie die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

b) Berechnen Sie den Kern von f.

c) Berechnen Sie die Dimension des Bildes von f.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren von A.

c) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a & 4 & 6 \\ 2 & 4 & b & 8 \end{pmatrix}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x,y) = x^3 + 5\,x^2 y - 3\,x\,y^2 - x$$

um den Punkt $(1,1)$.

Aufgabe 5 (8 Punkte):

Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2.$$

a) Berechnen Sie alle lokalen Minima und Maxima von f.

b) Welche Punkte kommen als Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 - x - y - 1 = 0$$

in Frage?

Aufgabe 6 (6 Punkte):

a) Betrachten Sie im $\mathbb{R}^2$ das Dreieck

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 2\,x\}$$

und berechnen Sie das 2-dimensionale Integral

$$\int_D x\,y\; d(x,y).$$

b) Betrachten Sie im $\mathbb{R}^2$ den Kreis

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

und berechnen Sie das 2-dimensionale Integral

$$\int_K \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\; d(x,y).$$

Łösungen:

1. a) In den Spalten der Matrix A stehen die Bilder der Standardbasisvektoren, somit gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

b) Zur Berechnung des Kerns lösen wir das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ -1 & 2 & -5 & | & 0 \\ 3 & -4 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir nun $x_3 = t$ als frei wählbar, so ergeben sich $x_2 = 3t$ und $x_1 = t$. Somit ist der Kern

$$\operatorname{Kern} A = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}. \quad \text{Offensichtlich ist } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ eine Basis des Kerns von } A.$$

c) Nach der Dimensionsformel gilt $\dim \operatorname{Bild}(f) + \dim \operatorname{Kern}(f) = 3$. In b) haben wir gesehen, dass $\dim \operatorname{Kern}(f) = 1$ ist, also folgt $\dim \operatorname{Bild}(f) = 2$.

2. a) Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom. Es empfiehlt sich hier, nach der zweiten Zeile oder zweiten Spalte zu entwickeln:

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det \begin{pmatrix} -4-X & 0 & -4 \\ 0 & -4-X & 0 \\ 9 & 0 & 8-X \end{pmatrix} \\ &= (-4-X) \cdot \det \begin{pmatrix} -4-X & -4 \\ 9 & 8-X \end{pmatrix} \\ &= (-4-X)\big((-4-X)(8-X)+36\big) \\ &= -(X+4)(X^2-4X+4) = -(X+4)(X-2)^2. \end{aligned}$$

Daher sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -4, \lambda_{2,3} = 2$.

b) Bestimmen wir zuerst die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -4$. Dazu lösen wir $A\vec{x} = -4\vec{x}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 9 & 0 & 12 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Also folgt, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis dieses Eigenraums ist.

Bestimmen wir jetzt die Eigenvektoren zu $\lambda_{2,3} = 2$. Dazu lösen wir analog $A\vec{x} = 2\vec{x}$:

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & -6 & 0 & | & 0 \\ 9 & 0 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit besteht eine Basis dieses Eigenraums aus dem Vektor $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) A ist nicht diagonalisierbar, da es nur 2 linear unabhängige Eigenvektoren gibt, somit existiert keine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A.

3. Wir formen die Matrix mit dem Gauß-Algorithus um:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a & 4 & 6 \\ 2 & 4 & b & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & b-6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Form können wir ablesen, dass der Rang der Matrix nur von b abhängt. Wir erhalten nämlich eine Nullzeile, falls $b - 6 = 0$ ist. Demzufolge gilt also, dass der Rang der Matrix 2 ist, wenn $b = 6$ ist. Andernfalls wenn $b - 6 \neq 0$ ist, also $b \neq 6$, dann hat die Matrix den Rang 3.

4. (a) Das Taylorpolynom vom Grad 2 um den Punkt $(1, 1)$ sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} T_2\big(f, (x, y), (1, 1)\big) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) \\ &= \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(1,1)(x-1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)(x-1)(y-1) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1)(y-1)(x-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(1,1)(y-1)^2\Bigg). \end{aligned}$$

Daher berechnen wir alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 + 5x^2y - 3xy^2 - x \quad, \text{also } f(1,1) = 2, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 + 10xy - 3y^2 - 1 \quad, \text{also } \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 9, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 5x^2 - 6xy \quad, \text{also } \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) &= 6x + 10y \quad, \text{also } \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(1,1) = 16, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 10x - 6y \quad, \text{also } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 4, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) &= -6x \quad, \text{also } \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(1,1) = -6. \end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} T_2\big(f,(x,y),(1,1)\big) &= 2+9(x-1)+(-1)(y-1) \\ &+ \frac{1}{2}\big(16(x-1)^2+4(x-1)(y-1)+4(x-1)(y-1)+(-6)(y-1)^2\big) \\ &= 8x^2-3y^2+4xy-11x+y+3. \end{aligned}$$

5. (a) Gesucht sind alle lokalen Minima und Maxima. Wir berechnen also zunächst den Gradienten und die Hesse-Matrix von f:

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} f(x,y) &= (3x^2+4x+y, x+y), \\ H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} 6x+4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Als erstes suchen wir alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{grad} f(x,y)=0$:
Es soll gelten $3x^2+4x+y=0$ und $x+y=0$. Also $x=-y$ und $3x^2+3x=0$. Somit $y=-x$ und ($x=0$ oder $x=-1$). Wir erhalten deshalb die beiden Punkte $(0,0)$ und $(-1,1)$ als mögliche Extrema.
Nun ziehen wir die Hesse-Matrix zur weiteren Entscheidung heran. Es ist $\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 > 0$ und $4>0$, also ist bei $(0,0)$ ein lokales Minimum.
Da $\det H_f(-1,1) = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -3 < 0$, ist bei $(-1,1)$ ein Sattelpunkt.

(b) 1. Version: Wir erstellen und lösen die notwendigen Bedingungen wie in der Vorlesung besprochen mit Lagrange-Multiplikatoren:
Ansatz: $g(x,y)=0$ und $\mathrm{grad} f(x,y)+\lambda \mathrm{grad} g(x,y)=(0,0)$. Daraus erhalten wir die drei Gleichungen $x^2-x-y-1=0$, $3x^2+4x+y+\lambda(2x-1)=0$ und $x+y+\lambda(-1)=0$. Wir können z.B. die erste Gleichung nach y, die dritte nach λ auflösen und in die zweite Gleichung einsetzen. Konkret wird $y=x^2-x-1$ und $\lambda=x+y=x^2-1$ in $3x^2+4x+y+\lambda(2x-1)=0$ eingesetzt, wir erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2+4x+x^2-x-1+(x^2-1)(2x-1) \\ &= 2x^3+3x^2+x \end{aligned}$$

Als erste Lösung erhalten wir $x_1=0$. Die Lösungen der verbleibenden quadratischen Gleichung $x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$ lauten $x_{2,3}=-\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}$. Also $x_2=-1$ und $x_3=-\frac{1}{2}$. Setzen wir dies in die Ausgangsgleichungen ein, so sehen wir, dass die drei Punkte $(0,-1)$, $(-1,1)$ und $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ als Extramalstellen in Frage kommen.

2. Version: Bei diesem Beispiel sehen wir, dass wir die Nebenbedingung $g(x,y)=0$ nach y auflösen und in $f(x,y)$ einsetzen können:
Aus $g(x,y)=0$ erhalten wir $y=x^2-x-1$. Damit suchen wir Extremalstellen von

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3+2x^2+x(x^2-x-1)+\frac{1}{2}(x^2-x-1)^2 \\ &= x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

einer Funktion in einer Variablen. Notwendig ist hier, dass deren erste Ableitung verschwindet, dies führt zur Gleichung $3x^2 + x + 2x^3 = 0$. Wie in Version 1 erhalten wir hieraus die gesuchten Kandidaten.

6. (a)

$$\int_D xy \, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{2x} xy \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^{2x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x \cdot 4x^2 \, dx = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(b) Wir benutzen Polarkoordinaten. Der Transformationssatz sagt uns, dass $d(x,y) = r\, d(r,\varphi)$. Damit erhalten wir:

$$\int_K \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} \, d(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\sin(r)}{r} r \, dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^1 \sin(r) \, dr$$
$$= 2\pi \left[-\cos(r)\right]_0^1 = 2\pi(-\cos(1) + \cos(0)) = 2\pi(-\cos(1) + 1).$$