Klausur Mathematik II

(Informatiker)

13. September 2007

(Hans-Georg Rück)

Aufgabe 1 (7 Punkte):

Wie üblich seien

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^3$.
Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die folgende Festlegung gegeben:

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3 \ , \ f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 - 4\,\vec{e}_3 \ , \ f(\vec{e}_3) = 2\,\vec{e}_1 - 5\,\vec{e}_2 + 9\,\vec{e}_3.$$

a) Berechnen Sie die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

b) Berechnen Sie den Kern von f.

c) Berechnen Sie die Dimension des Bildes von f.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren von A.

c) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a & 4 & 6 \\ 2 & 4 & b & 8 \end{pmatrix}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösungen:

1. a) In den Spalten der Matrix A stehen die Bilder der Standardbasisvektoren, somit gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

   b) Zur Berechnung des Kerns lösen wir das lineare Gleichungsystem $A\vec{x} = \vec{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & -4 & 9 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

   Setzen wir nun $x_3 = t$ als frei wählbar, so ergeben sich $x_2 = 3t$ und $x_1 = t$. Somit ist der Kern

$$\mathrm{Kern} A = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}. \quad \text{Offensichtlich ist } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ eine Basis des Kerns von } A.$$

   c) Nach der Dimensionsformel gilt $\dim \mathrm{Bild}(f) + \dim \mathrm{Kern}(f) = 3$. In b) haben wir gesehen, dass $\dim \mathrm{Kern}(f) = 1$ ist, also folgt $\dim \mathrm{Bild}(f) = 2$.

2. a) Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom. Es empfiehlt sich hier, nach der zweiten Zeile oder zweiten Spalte zu entwickeln:

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det \begin{pmatrix} -4-X & 0 & -4 \\ 0 & -4-X & 0 \\ 9 & 0 & 8-X \end{pmatrix} \\ &= (-4-X) \cdot \det \begin{pmatrix} -4-X & -4 \\ 9 & 8-X \end{pmatrix} \\ &= (-4-X)\big((-4-X)(8-X)+36\big) \\ &= -(X+4)(X^2-4X+4) = -(X+4)(X-2)^2. \end{aligned}$$

   Daher sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -4, \lambda_{2,3} = 2$.

   b) Bestimmen wir zuerst die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -4$. Dazu lösen wir $A\vec{x} = -4\vec{x}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

   Also folgt, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis dieses Eigenraums ist.

Bestimmen wir jetzt die Eigenvektoren zu $\lambda_{2,3} = 2$. Dazu lösen wir analog $A\vec{x} = 2\vec{x}$:

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & -4 & | & 0 \\ 0 & -6 & 0 & | & 0 \\ 9 & 0 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit besteht eine Basis dieses Eigenraums aus dem Vektor $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) A ist nicht diagonalisierbar, da es nur 2 linear unabhängige Eigenvektoren gibt, somit existiert keine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A.

3. Wir formen die Matrix mit dem Gauß-Algorithus um:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a & 4 & 6 \\ 2 & 4 & b & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & b-6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Form können wir ablesen, dass der Rang der Matrix nur von b abhängt. Wir erhalten nämlich eine Nullzeile, falls $b - 6 = 0$ ist. Demzufolge gilt also, dass der Rang der Matrix 2 ist, wenn $b = 6$ ist. Andernfalls wenn $b - 6 \neq 0$ ist, also $b \neq 6$, dann hat die Matrix den Rang 3.