

Klausur zur Vorlesung Mathematik III
(Differentialgleichungen und Funktionentheorie)

Version mit Lösungsskizzen

Es können maximal **30** Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1. (3+3=6 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{8}y^{-3}(2x + e^x), \quad y(0) = 1$$

auf $G = \mathbb{R} \times]0, \infty[$. (Hinweis: Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen.)

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x^{-1}y + \sqrt{x}, \quad y(1) = 1$$

auf $G =]0, \infty[\times \mathbb{R}$. (Hinweis: Dies ist eine inhomogene, lineare, skalare DGL. Sie können die Methode der Variation der Konstanten benutzen.)

Lösung zu Aufgabe 1.

a) Es handelt sich um eine DGL mit getrennten Variablen. Wir machen den wohlbekanntesten Ansatz "Trennung der Variablen"

$$\int_1^y 8s^3 ds = \int_0^x (2t + e^t) dt,$$

was uns dann auf $2y^4 - 2 = x^2 + e^x - 1$ führt. Auflösen nach y ergibt, dass

$$y(x) = \left(\frac{x^2 + e^x + 1}{2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

die Lösung des Anfangswertproblems ist. Der Definitionsbereich der Lösung ist \mathbb{R} .

b) Wir brauchen als Hilfsfunktion die Lösung

$$\varphi(x) = \exp\left(\int_1^x t^{-1} dt\right) = \exp(\log(x)) = x$$

von dem homogen-linearen AWP $[y' = x^{-1}y, y(1) = 1]$. Die Variation der Konstanten liefert die Lösung

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \varphi(x)\left(1 + \int_1^x \varphi(s)^{-1} \sqrt{s} ds\right) = \\ &= x\left(1 + \int_1^x s^{-1} \sqrt{s} ds\right) = \\ &= x\left(1 + \int_1^x s^{-\frac{1}{2}} ds\right) = \\ &= x\left(1 + 2x^{\frac{1}{2}} - 2\right) = x(2\sqrt{x} - 1) \end{aligned}$$

$(\psi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R})$ von dem AWP.

Aufgabe 2. (2+4=6 Punkte)

Wir betrachten die inhomogen-lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - 5y' + 6y = e^{5x} \quad (\mathcal{I}).$$

- a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für den homogen-linearen Anteil

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (\mathcal{H}).$$

- b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogen-linearen Differentialgleichung (\mathcal{I}). Wie sieht die allgemeine Lösung von (\mathcal{I}) aus?

Lösung zu Aufgabe 2.

- a) Das charakteristische Polynom von (\mathcal{H}) ist $P(T) = T^2 - 5T + 6 = (T - 2)(T - 3)$ (pq -Formel!). Daher ist (e^{2x}, e^{3x}) ein Fundamentalsystem von (\mathcal{H}).
- b) Satz der Vorlesung zum Ansatzverfahren garantiert die Existenz einer Lösung ψ von (\mathcal{I}) der Form $\psi(x) = x^v c e^{5x}$, wobei v die Vielfachheit von 5 als Nullstellen von $P(T)$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Dabei ist $v = 0$, da $P(5) \neq 0$, und somit ist $\psi(x) = c e^{5x}$. Wir setzen nun ψ in die DGL (\mathcal{I}) ein, um c zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= 5c e^{5x} \\ \psi''(x) &= 25c e^{5x} \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \psi \text{ ist Lsg. von } (\mathcal{I}) &\Leftrightarrow \psi'' - 5\psi' + 6\psi = e^{5x} \\ &\Leftrightarrow 25c e^{5x} - 25c e^{5x} + 6c e^{5x} = e^{5x} \\ &\Leftrightarrow 6c = 1 \\ &\Leftrightarrow c = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Es ist also $\boxed{\psi(x) = \frac{1}{6} e^{5x}}$ eine Lsg. von (\mathcal{I}). Die allgemeine Lösung von (\mathcal{I}) ist

$$\psi_c(x) = \psi(x) + c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad (c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2).$$

Aufgabe 3. (3+3=6 Punkte)

a) Wir betrachten die skalare lineare Differentialgleichung

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y^{(3)} - 4y^{(2)} + 3y' - y = 0 \quad (\mathcal{L}).$$

Wir geben bekannt, dass das charakteristische Polynom $P(T)$ von (\mathcal{L}) in faktori-
sierter Form durch

$$P(T) = (T - i)(T + i)(T - 1)^3$$

gegeben ist. Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von (\mathcal{L}) .

b) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für das lineare System

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y \quad (\mathcal{S}).$$

Lösung zu Aufgabe 3.

a) Nach einem wohlbekannten Satz ist durch

$$(e^{ix}, e^{-ix}, e^x, xe^x, x^2e^x)$$

ist ein \mathbb{C} -Fundamentalsystem von (\mathcal{L}) gegeben.

$$(\sin(x), \cos(x), e^x, xe^x, x^2e^x)$$

ist dann also ein \mathbb{R} -Fundamentalsystem von (\mathcal{L}) .

b) Sei A die System-Matrix. Da A eine untere Dreiecksmatrix ist, lesen wir die Eigen-
werte von A auf der Diagonalen ab. Die Eigenwerte von A sind also 1 und 2. Wir
berechnen die Eigenräume:

$$L(A - 1E|0) = L\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \mathbb{R}\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right),$$

$$L(A - 2E|0) = L\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = L\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mathbb{R}\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right).$$

Also ist

$$\phi(x) = \left(e^x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ -e^x & e^{2x} \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von (\mathcal{S}) .

Aufgabe 4. (3+3=6 Punkte)

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{2i, -2i, 1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)(z - 1)}.$$

- a) Berechnen Sie für jeden Pol z_0 von f das Residuum $\text{Res}_{z_0}(f)$.
b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- (i) $\int_{|z|=3} f(z) dz$.
(ii) $\int_{|z|=1.5} f(z) dz$.
(iii) $\int_{|z-100|=1} f(z) dz$.

(Hinweis: Residuensatz!)

Lösung zu Aufgabe 4.

- a) Es gilt $f(z) = \frac{z}{(z-2i)(z+2i)(z-1)}$. Die Pole sind alle einfach. Daher kann man so rechnen:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{2i}(f) &= \lim_{z \rightarrow 2i} f(z)(z - 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z}{(z+2i)(z-1)} = \\ &= \frac{2i}{4i(2i-1)} = \frac{1}{4i-2} = -\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i, \\ \text{Res}_{-2i}(f) &= -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i, \\ \text{Res}_1(f) &= \lim_{z \rightarrow 1} f(z)(z - 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z^2+4)} = \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

- b) Man muss jeweils (anhand einer Skizze oder im Kopf) ermitteln, welche Pole von dem Integrationsweg umlaufen werden und dann den Residuensatz anwenden.

- (i) Hier werden alle drei Pole von dem Integrationsweg umlaufen. Daher

$$\int_{|z|=3} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}_1(f) + \text{Res}_{2i}(f) + \text{Res}_{-2i}(f)) = 0.$$

- (ii) Hier wird nur der Pol 1 von dem Integrationsweg umlaufen. Daher

$$\int_{|z|=1.5} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}_1(f) = \frac{2}{5}\pi i.$$

- (iii) Hier wird kein Pol von dem Integrationsweg umlaufen. Es folgt $\int_{|z-100|=1} f(z) dz = 0$.

Aufgabe 5. (2+2+2=6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie die größte offene Menge $D \subset \mathbb{C}$ derart, dass die Laurent-Reihe $\sum_{n=-2}^{\infty} (n+3)(z-i)^n$ für alle $z \in D$ konvergiert. (Hinweis: Mit dem Quotientenkriterium kann man den Konvergenzradius des Hauptteils berechnen.)
- b) Wir betrachten die gebrochen-rationale Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{2, i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-i)}$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihenentwicklung von f um $z_0 = 0$. (Anmerkung: Es ist nicht verlangt, diese Potenzreihenentwicklung explizit zu berechnen; wir fragen hier nur nach r . Hinweis: Entwicklungssatz.)
- c) Entscheiden Sie mit kurzer Begründung, ob die Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = \operatorname{Re}(z)^2 + i \cdot \operatorname{Im}(z)$ holomorph ist. (Hinweis: Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen!)

Lösung zu Aufgabe 5.

- a) Sei R der Konvergenzradius des Hauptteils $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+3)}_{=:a_n} (z-i)^n$. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n+3} = 1.$$

Mit dem Quotientenkriterium (Fassung von Cauchy-Hadamard) folgt $R = 1$. Da der Nebenteil endlich ist aber nicht ganz verschwindet, muss D die punktierte Disk $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < 1\} \setminus \{i\}$ sein.

- b) Nach dem Entwicklungssatz konvergiert die Reihe auf jeder ganz im Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{2, i\}$ enthaltenen offenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 (gegen f). Daher ist $r \geq 1$. Es kann aber nicht $r > 1$ gelten, da sonst f nach i stetig fortsetzbar wäre, was wegen des Pols bei i nicht der Fall ist. Also ist $r = 1$.
- c) Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned} \underline{\operatorname{Re}}g(x, y) &:= \operatorname{Re}(g(x+iy)) = \operatorname{Re}(x^2 + iy) = x^2 \text{ und} \\ \underline{\operatorname{Im}}g(x, y) &:= \operatorname{Im}(g(x+iy)) = \operatorname{Im}(x^2 + iy) = y \quad (x, y \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Es gilt $\partial_y \underline{\operatorname{Im}}g(x, y) = 1$ und $\partial_x \underline{\operatorname{Re}}g(x, y) = 2x$ und daher $\partial_y \underline{\operatorname{Im}}g(x, y) \neq \partial_x \underline{\operatorname{Re}}g(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Daher ist g nicht holomorph.