KLAUSUR

Mathematik III für Mechatroniker

09. März 2016

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:	Versuch Nr.:

Unterschrift:

Für jede der Aufgaben gibt es 10 Punkte.
Zum Bestehen der Klausur sind 23 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1+x}{1-x}\, y(x)^2 \,, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$
und skizzieren Sie die Lösung.

2. Die Ellipsenschar sei durch die Gleichung
$$x^2 + A\, y^2 = 1 \quad (A > 0)$$
gegeben. Bestimmen Sie die Gleichung der zugehörigen Orthogonaltrajektorien. Skizzieren Sie die beiden Kurvenscharen.

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung
$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 8(x^2 + x + 1) \ .$$
Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$.

4. Es sei $z = x + i\, y$, $f(z) = \sin(z^2)$, $u(x,y) = \text{Re } f(z)$ sowie $v(x,y) = \text{Im } f(z)$.
Überprüfen Sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
Hinweis: Es gelten die Formeln
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \text{und} \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\ \cos(a) \ ,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{und} \quad \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \ ,$$
$$\cos(iz) = \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad \text{und} \quad \sin(iz) = i \sinh z = \frac{i}{2}(e^z - e^{-z}) \ ,$$
$$\sinh(x)' = \cosh(x) \quad \text{und} \quad \cosh(x)' = \sinh(x) \ .$$

5. (a): Bestimmen Sie die Laurentreihe der Funktion $f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ bis zur Ordnung 3. *Hinweis:* Untersuchen Sie, ob $f(z)$ gerade oder ungerade ist.
(b): Bestimmen Sie das Residuum von $f(z)$ am Ursprung:
$$\operatorname*{Res}_{z=0} \cot z \ .$$

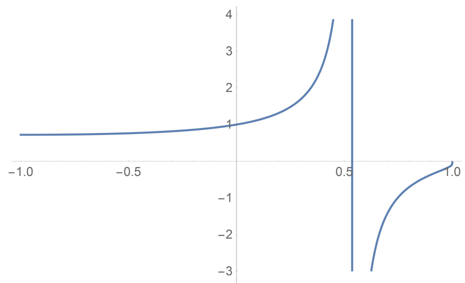
Lösungen:

1. Bei der Differentialgleichung $y'(x) = \frac{1+x}{1-x} y(x)^2$ lassen sich die Variablen trennen. Wir erhalten mit Polynomdivision

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{y} = \int \frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int \left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)\,\mathrm{d}x - x - 2\ln(1-x) + C\ .$$

Der Anfangswert $y(0) = 1$ liefert $C = -1$, so dass wir nach y auflösen können und erhalten

$$y = \frac{1}{x + 2\ln(1-x) + 1}\ .$$



Die Lösung $\frac{1}{x+2\ln(1-x)+1}$

2. Ableiten der Gleichung

$$x^2 + A\,y^2 = 1$$

der Ellipsenschar liefert

$$2x + 2Ayy' = 0\ .$$

Wir müssen A eliminieren. Lösen wir beide Gleichungen nach A auf und setzen sie gleich, erhalten wir

$$\frac{1-x^2}{y^2} = A = -\frac{x}{y\,y'}$$

und nach Auflösen nach y' somit

$$y'(x) = \frac{x\,y}{x^2-1}\ .$$

Die Orthogonaltrajektorien erfüllen also die Differentialgleichung

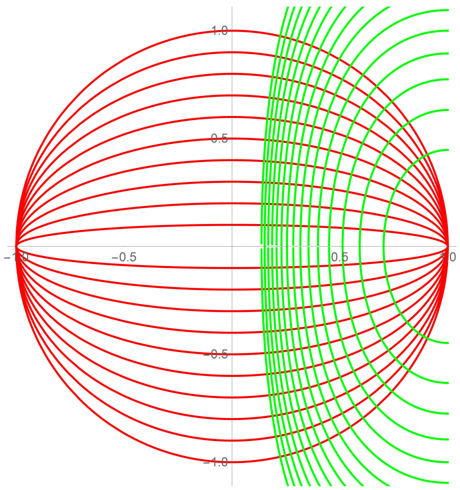
$$y'(x) = -\frac{x^2-1}{x\,y}\ .$$

Trennung der Variablen liefert

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{1+x}{1-x}\,dx\ .$$

Dies liefert die Gleichung der zugehörigen Orthogonaltrajektorien

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \ln x + C \ .$$



Die Ellipsenschar und ihre Orthogonaltrajektorien

3. Zunächst lösen wir das homogene System $y'' + 4y' + 4y = 0$. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ mit doppelter Nullstelle -2. Somit erhalten wir laut Vorlesung die Basis $y_1(x) = e^{-2x}, y_2(x) = x\, e^{-2x}$.

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhalten wir durch den Ansatz $y(x) = a\, x^2 + b\, x + c$. Es gilt $y'(x) = 2ax + b$ und $y''(x) = 2a$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert $4\,(ax^2 + bx + c) + 4(2ax + b) + 2a - 8\,(x^2 + x + 1) = 0$. Koeffizientenvergleich ergibt: $a = 2, b = -2, c = 3$.

Also ist $y(x) = A\, e^{-2x} + B\, x\, e^{-2x} + 2x^2 - 2x + 3$ und $y'(x) = -2A\, e^{-2x} + B\, e^{-2x} - 2B\, x\, e^{-2x} + 4\, x - 2$. Somit ist $y(0) = A + 3 = 0$, also $A = -3$, und $y'(0) = -2A + B - 2 = B + 4 = 0$, also $B = -4$.

Die gesuchte Lösung des AWP ist also $y(x) = -3e^{-2x} - 4x\, e^{-2x} + 2x^2 - 2x + 3$.

4. Für $f(z) = \sin(z^2)$ erhalten wir mit den Beziehungen der hyperbolischen Funktionen

$$f(z) = \sin(x^2 - y^2)\ \cosh(2xy) + i\ \cos(x^2 - y^2)\ \sinh(2xy)$$

Für Real- und Imaginärteil erhalten wir also

$$u(x, y) = \sin(x^2 - y^2)\ \cosh(2xy) \qquad \text{und} \qquad v(x, y) = cos(x^2 - y^2)\ \sinh(2xy)\ .$$

Also sind

$$u_x(x, y) = 2y \sin(x^2 - y^2) \sinh(2xy) + 2x \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy)\ ,$$

$$u_y(x,y) = 2x\sin(x^2-y^2)\sinh(2xy) - 2y\cos(x^2-y^2)\cosh(2xy)\ ,$$
$$v_y(x,y) = 2y\sin(x^2-y^2)\sinh(2xy) + 2x\cos(x^2-y^2)\cosh(2xy)\ ,$$
$$v_x(x,y) = -2x\sin(x^2-y^2)\sinh(2xy) + 2y\cos(x^2-y^2)\cosh(2xy)\ .$$

Also gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

5. (a): Wegen $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ ist $\cot z$ ungerade und wir erhalten mit den Potenzreihen von sin und cos

$$\cot z = \frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\cdots}{z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}+\cdots} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\cdots}{1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{120}+\cdots} = \frac{1}{z}\cdot(A+B\,z^2+C\,z^4+\cdots)\ .$$

Nach Multiplikation mit dem Nenner folgt die Gleichung

$$1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\cdots = (A+B\,z^2+C\,z^4+\cdots)\left(1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{120}+\cdots\right)\ ,$$

und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\cot z = \frac{1}{z}\left(1-\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{45}\right)+\cdots = \frac{1}{z}-\frac{z}{3}-\frac{z^3}{45}+\cdots\ .$$

(b): Aus (a) folgt

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\cot z = 1\ .$$