KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker/Mechatroniker

20.3.2015

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 6 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y^3}{2\,x^2}\,, \quad x > 0\,.$$

Geben Sie den Definitionsbereich der Lösungen an.
Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems: $y(1) = -2$?

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y''' - y' = e^x\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Ansatzmethode zur Bestimmung einer partikulären Lösung.

3. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} Y\,, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

4. Die Funktion $f(z) = (z+i)^2$ bildet die komplexe z-Ebene in die komplexe w-Ebene ab. Geben Sie Real- und Imaginärteil von f an, und zeigen Sie, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Welche Kurven bekommt man in der w-Ebene, wenn man Parallelen zur imaginären Achse in der z-Ebene abbildet?

5. Gegeben sind die Kurven : $\Gamma_1 : z(t) = r_0\,e^{t\,i}\,, t \in [0, 2\,\pi]$ und $\Gamma_2 : z(t) = -i + 3\,t\,i\,, t \in [0,1]$. Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz$ und $\int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz$ über die Funktion $f(z) = \overline{z}$.

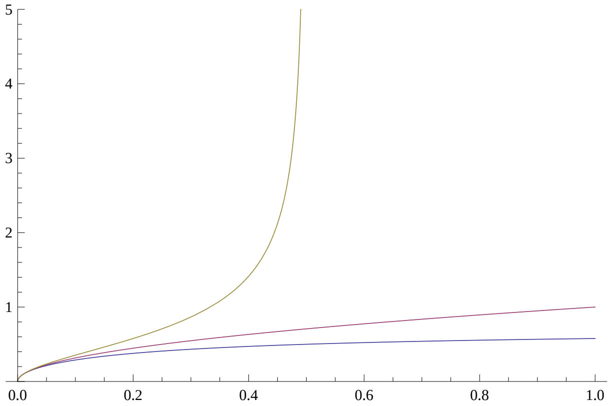
Lösungen

1.)

$$\int \frac{-2}{y^3}\,dy = \int \frac{-1}{x^2}\,dx\,.$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x} + c \quad \text{bzw.} \quad y = \pm\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x}+c}}\,.$$

Das Pluszeichen bzw. das Minuszeichen steht für Lösungen in der oberen bzw. unteren Halbebene. Außerdem ist $y = 0$ eine Lösung. Die Lösungen sind erklärt für $\frac{1}{x} + c > 0$.
Also: $c \leq 0$: $0 < x$.
$c > 0$: $0 < x < -\frac{1}{c}$.



Lösungen für $c = 0$, $c = -2$ und $c = +2$.

$y(1) = -2$:

$$-2 = -\sqrt{\frac{1}{1+c}}$$

$$4 = \frac{1}{1+c}$$

$$c = 3\,, \quad y(x) = -\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x}+3}}\,.$$

2.) Das charakteristische Polynom (der homogenen Gleichung) lautet:

$$\lambda^3 - \lambda = 0$$

mit den Nullstellen $\lambda = 0, -1, 1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$y_h(x) = c_1 + c_2\, e^{-x} + c_3\, e^{x}\,.$$

Nach der Ansatzmethode gibt es eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung der Gestalt:

$$y_p(x) = a\, x\, e^{x}\,.$$

Wir bekommen:

$$y_p'(x) = (a\,x + a)\, e^{x}\,, \quad y_p''(x) = (a\,x + 2\,a)\, e^{x}\,, \quad y_p'''(x) = (a\,x + 3\,a)\, e^{x}\,.$$

Einsetzen und Koeffizientenvergleich ergibt:

$$1 - 2\,a = 0\,.$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = c_1 + c_2\, e^{-\sqrt{3}\,x} + c_3\, e^{\sqrt{3}\,x} + \frac{1}{2}\, x\, e^{x}\,.$$

3) Das charakteristische Polynom lautet:

$$\det(A - \lambda\, E) = A = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 5)\,(\lambda - 1) = 0\,.$$

Die Matrix A besitzt folgende Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 5\,, \quad \lambda_2 = 1\,.$$

Wir bekommen

$$A - \lambda_1\, E = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,, \quad A - \lambda_2\, E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\,,$$

und zugehörige Eigenvektoren $(1, 1)$, $(-3, 1)$. Damit ergibt sich ein Fundamentalsystem:

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5\,x}\,, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x}\,.$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5\,x} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x}\,.$$

Für $x = 0$ gilt:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Ds System besitzt die Lösung:

$$c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}\,.$$

4) Es gilt:

$f(z) = f(x+y\,i) = (x+(y+1)\,i)^2 = x^2-(y+1)^2+2x\,(y+1)\,i = u(x,y)+v(x,y)\,i\,.$

Man sieht sofort:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y) = 2\,x\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = 2\,(y+1)\,.$$

Eine Parallele zur reellen Achse wird gegeben durch: $z = x_0+y\,i$, $y \in \mathbb{R}$ beliebig, $x_0 \in \mathbb{R}$ fest. Die Parallele wird abgebildet auf $w = u + v\,i$ mit

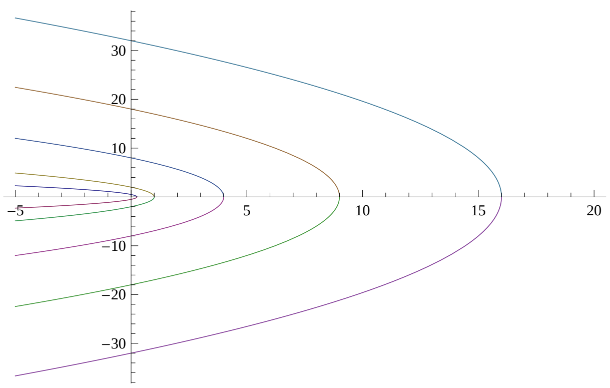
$$u = x_0^2 - (y+1)^2\,, \quad v = 2\,x_0\,(y+1)\,,$$

Mit

$$-(u - x_0^2) = \left(\frac{v}{2\,x_0}\right)^2$$

bekommen wir als Bild die Parabel:

$$u = -\frac{v^2}{4\,x_0^2} + x_0^2\,, x_0 \neq 0\,, \quad u \leq 0\,, v = 0\,, x_0 = 0\,.$$



Parabeln

$$u = u = -\frac{v^2}{4\,x_0^2} + x_0^2\,.$$

5) Es gilt:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \overline{r_0\,e^{t\,i}}\,r_0\,i\,e^{t\,i}\,dt = r_0^2\,i\int_0^{2\pi} dt = 2\,\pi\,r_0^2\,i$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz &= \int_0^1 3\,i - i + 3\,t\,i\,3\,i\,dt = \int_0^1 (-3+9\,t)\,dt\\ &= \left(-3\,t + \frac{9}{2}\,t^2\right)_{t=0}^{t=1} = \frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$