KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker/Mechatroniker

21.3.2013

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind 24 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y' = \frac{y^3}{x^2}\,, x > 0\,, y > 0\,.$$

   Geben Sie den Definitionsbereich der Lösungen an.
   Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(1) = 2$.

2. Betrachten Sie die Differentialgleichung: $y''' + y' = \sin(3\,x)$.
   Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.
   Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.
   (Hinweis: Verwenden Sie die komplexe Ansatzmethode).

3. Gegeben ist das Differentialgleichungssystem: $Y' = AY$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   Berechnen Sie die Potenzen von A mit dem Satz von Cayley-Hamilton.
   Geben Sie die Matrixexponentialfunktion $e^{A\,x}$ an, sowie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems.

4. Geben Sie den Realteil und den Imaginärteil der folgenden Funktion an: $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = (z-1)^2$.
   Bilden Sie Parallelen zur imaginären Achse in der z-Ebene unter der Abbildung $f(z) = w$ ab. Welche Kurven ergeben sich in der w-Ebene? Zeichnen Sie eine Skizze.

5. Geben Sie die Pole der Funktion $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$ mitsamt ihren Residuen an.
   Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} f(z)\,dz$. (Positiver Umlaufsinn).
   Geben Sie die Taylorreihe von f um den Punkt $z_0 = 0$ an. Welchen Konvergenzradius besitzt die Reihe?

Lösungen

1.) Trennung der Veränderlichen:

$$y' = \frac{y^3}{x^2}\,, \frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2}\,, \quad \textbf{2P}$$

$$\int \frac{1}{y^3}\,dy = \int \frac{1}{x^2}\,dx\,, \quad \textbf{2P}$$

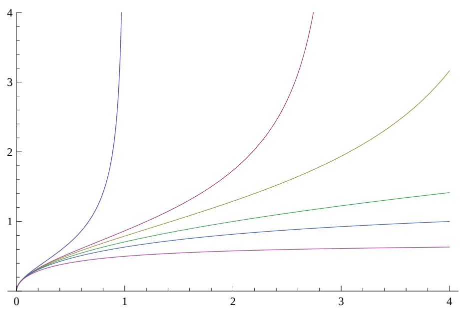
$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{x} + c$$

$$y^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{-\frac{1}{x}+c}\,, y = \frac{1}{\sqrt{2\,\left(\frac{1}{x}-c\right)}} \quad \textbf{2P}$$

Definitionsbereich:
$c \leq 0$: $x > 0$.
$c > 0$: $-\frac{1}{x} + c < 0$, $0 < x < \frac{1}{c}$. **2P**

AWP: $y'(1) = 2$, $y'(1) = (y(1))^3$, $2 = \frac{1}{\sqrt{2\,(1-c)}}$, $c = 1 - \frac{1}{2\,\sqrt[3]{2}}$ **2P**.

AWP: $y(1) = 2$, $4 = \frac{1}{2\,(-1+c)}$, $c = \frac{7}{8}$ **2P**.



Allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{y^3}{x^2}$

2.) Charakteristisches Polynom:

$$\lambda^3 + \lambda = 0\,.$$

Nullstellen:

$$\lambda = 0\,,\lambda_{2,3} = \pm\, i\,.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h(x) = c_1 + c_2\,\cos(x) + c_3\,\sin(x)\,. \quad \textbf{2P}$$

Gegebene Differentialgleichung als Imaginärteil von

$$y''' + y' = e^{3\,i\,x} \quad \textbf{2P}$$

Ansatz für komplexe Lösung:

$$y_p(x) = C\,e^{3\,i\,x}\,. \quad \textbf{2P}$$

Einsetzen:

$$((3\,i)^3 + 3\,i)\,C\,e^{3\,x\,i} = e^{3\,x\,i}\,.$$

$$((3\,i)^3 + 3\,i)\,C = 1\,, 3\,i\,((3\,i)^2 + 1)\,C = 1\,, 3\,i(-8)\,C = 1\,, C = \frac{1}{24}\,i\,. \quad \textbf{2P}$$

Reelle Lösung der gegebenen Differentialgleichung:

$$\Im(y_p(x)) = \Im\left(\frac{1}{24}\,i\,e^{3\,i\,x}\right) = \frac{1}{24}\,\cos(3\,x)\,. \quad \textbf{2P}$$

Oder:

$$y_p(x) = A\,\cos(3\,x) + B\,\sin(3\,x)$$

liefert:

$$A = \frac{1}{24}\,, B = 0\,.$$

3) Das charakteristische Polynom lautet:

$$\det(A - \lambda\, E) = A = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\,\lambda = 0\,. \quad \textbf{2P}$$

Satz von Cayley-Hamilton:

$$A^2 - 7\,A = O\,, A^2 = 7\,A\,, A^3 = 7^2\,A\,, A^4 = 7^3\,A\,, ...$$

$$A^n = 7^{n-1}\,A \quad \textbf{2P}$$

Matrixexponentialfunktion:

$$e^{A\,x} = E + A\,x + A^2\,\frac{x^2}{2!} + A^3\,\frac{x^3}{3!} + A^4\,\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{A\,x} = E + A\,x + 7\,A\,\frac{x^2}{2!} + 7^2\,A\,\frac{x^3}{3!} + 7^3\,A\,\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{A\,x} = E + \frac{1}{7}\left(7\,x + 7^2\,\frac{x^2}{2!} + 7^3\,\frac{x^3}{3!} + 7^4\,\frac{x^4}{4!} + \cdots\right) A \quad \textbf{2P}$$

$$e^{A\,x} = E + \frac{1}{7}\left(-1 + 1 + 7\,x + 7^2\,\frac{x^2}{2!} + 7^3\,\frac{x^3}{3!} + 7^4\,\frac{x^4}{4!} + \cdots\right) A$$

$$e^{A\,x} = E - \frac{1}{7}\,A + \frac{1}{7}\,A\,e^{7\,x} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\,A\,e^{7\,x} \quad \textbf{2P}$$

Fundamentalsystem:

$$Y_1(x) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{7\,x}\,, Y_2(x) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} e^{7\,x}\,, \quad \textbf{2P}$$

bzw.

$$\tilde{Y}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \tilde{Y}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7\,x}\,.$$

Oder: Eigenwerte, Eigenvektoren

$\lambda_1 = 0$: Eigenvektor: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 7$: Eigenvektor: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lifert das Fundamentalsystem $\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2$.

4)

$$f(x+y\,i)=((x-1)+y\,i)^2=(x-1)^2-y^2+2\,(x-1)\,y\,i\,. \quad \textbf{2P}$$

Realteil und Imaginärteil:

$$u(x,y)=(x-1)^2-y^2\,,\quad v(x,y)=2\,(x-1)\,y\,. \quad \textbf{2P}$$

$z=x_0+y\,i$, $w=f(z)=u(x_0,y)+v(x_0,y)\,i$:

$$u=(x_0-1)^2-y^2\,,\quad v=2\,(x_0-1)\,y\,. \quad \textbf{2P}$$

1.) $x_0=1$: $u=-y^2\,,\quad v=0$. Negative reelle Achse in der w-Ebene. **1P**

2.) Ist $x_0\neq 1$:

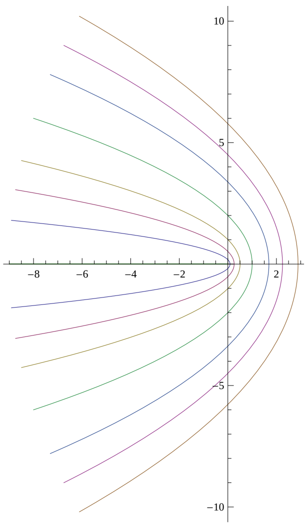
$$u=(x_0-1)^2-y^2\,,\quad v=2\,(x_0-1)\,y\,.$$

Eliminieren:

$$\frac{v}{2\,(x_0-1)}=y$$

$$u=-\frac{v^2}{4\,(x_0-1)^2}+(x_0-1)^2\,. \quad \textbf{2P}$$

Parabeln.



Bildkurven von $x=x_0$ unter $f(z)=(z-1)^2$ **1P**

5) Pole:

$$z = \pm i \quad \mathbf{2P}$$

$$f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1} = 1 + \frac{-2}{z^2+1}$$
$$\frac{-2}{z^2+1} = \frac{-i}{z+i} + \frac{i}{z-i} \quad \mathbf{2P}$$

Residuen:

$$f(z) = 1 + \frac{-i}{z+i} + \frac{i}{z-i}\,,$$
$$\mathrm{Res}(f,-i) = -i\,, \mathrm{Res}(f,i) = i\,. \quad \mathbf{2P}$$

Oder:

$$\lim_{z \to -i} (z+i)\, f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{z^2-1}{z-i} = -i\,,$$
$$\lim_{z \to i} (z-i)\, f(z) = \lim_{z \to i} \frac{z^2-1}{z+i} = i\,.$$

Der Kreis $|z-i| = 1$ umläuft einen Pol: $z = i$. Residuensatz:

$$\int\limits_{|z-i|=1} f(z)\, dz = 2\,\pi\, i\, i = -2\,\pi\,. \quad \mathbf{2P}$$

(Positiver Umlaufsinn).
Geometrische Reihe:

$$f(z) = 1 + \frac{-2}{1+z^2} = 1 - 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}\, z^{2\,\nu}\,, |z| < 1\,. \quad \mathbf{2P}$$