Klausur Mathematik III

(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

21. März 2014

(Hans-Georg Rück)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch-Nr.:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an. Bitte beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

Zum Bestehen der Klausur sollten **16 Punkte** erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Aufgabe 1 (4 Punkte): Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 4\,y + 2\,x\,\sqrt{y}\,.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte): Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des folgenden homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= 9\,y_1 + 4\,y_3 \\ y_2' &= 2\,y_2 \\ y_3' &= -20\,y_1 - 9\,y_3\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte): Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - y' - 6\,y = 18\,x^2 - 1 \text{ mit } y(0) = 1\,,\ y'(0) = 2\,.$$

Aufgabe 4 (8 Punkte): Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z + \bar{z}$.

a) Zeigen Sie, dass f reell differenzierbar aber nicht holomorph (d.h. komplex differenzierbar) ist.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{C_1} f(z)\,dz$$

längs der Strecke C_1 von 0 bis $1 + i$.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{C_2} f(z)\,dz$$

längs des Parabelstücks C_2 mit der Gleichung $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)^2$ von 0 bis $1 + i$.

Aufgabe 5 (6 Punkte): Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \frac{1}{z^3 + z}\,.$$

a) Berechnen Sie alle Pole von $g(z)$ und deren Residuen.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_K g(z)\,dz$$

längs des geschlossenen Kreises K, der entgegen dem Uhrzeigersinn um den Punkt $z_0 = \dfrac{1}{2}$ mit Radius 1 verläuft.

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 4P $y' = 4y + 2x \cdot y^{\frac{1}{2}}$

Bernoulli DGL, multipliziere mit $(1-\frac{1}{2})\, y^{-\frac{1}{2}}$:

$$\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' = 2 \cdot y^{\frac{1}{2}} + x$$

substituiere: $u = y^{\frac{1}{2}}$, dann: $u' = 2 \cdot u + x$

Löse homogenes System $u' = 2u$: $u(x) = C_1 \cdot e^{2x}$.

Variation der Konstanten: $u(x) = C(x) \cdot e^{2x}$

$$u'(x) = C(x) \cdot e^{2x} \cdot 2 + C'(x) \cdot e^{2x} = 2\,u(x) + C'(x) \cdot e^{2x}$$

also muss sein: $C'(x) \cdot e^{2x} = x$, $C'(x) = x \cdot e^{-2x}$

Somit $C(x) = \int x \cdot e^{-2x}\, dx$

Rechne $\int x \cdot e^{-2x} = x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) - \int -\frac{1}{2} e^{-2x}\, dx$

$$= -x\,\frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x}$$

Ergebnis: $u(x) = C \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}$

und $y(x) = u(x)^2 = \left(C \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\right)^2$.

Aufgabe 2: 6P

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -20 & 0 & -9 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Diagonalisiere A:

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} 9-X & 0 & 4 \\ 0 & 2-X & 0 \\ -20 & 0 & -9-X \end{pmatrix} = (2-X) \det \begin{pmatrix} 9-X & 4 \\ -20 & -9-X \end{pmatrix} =$$

$$(2-X)\big((9-X)(-9-X)+80\big) = (2-X)\big(X^2-81+80\big) = (2-X)(X^2-1)$$

$$= (2-X)(X-1)(X+1)$$

Eigenwerte: $2, 1, -1$

Eigenräume: __zu 2:__ $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & -11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Eigenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

__zu 1:__ $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -20 & 0 & -10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Eigenvektor $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

__zu -1:__ $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -20 & 0 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

__Eigenvektor__ $\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Somit $\quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

also $\quad S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$

$$y' = Ay = S D S^{-1} y$$

somit löst $\tilde{y} = S^{-1} y$ die Gleichung $\tilde{y}' = D \cdot \tilde{y}$

also (Fundamentallösung) $\quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$

Somit gilt: $\quad y = S \cdot \tilde{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{x} & 2e^{-x} \\ e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & -2e^{x} & -5e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: $y'' - y' - 6y = 18x^2 - 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

8P

Zuerst homogen: $y'' - y' - 6y = 0$

char. Polynom: $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, also $\lambda = 3, -2$

somit $y_1(x) = e^{3x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$

inhomogen: spezielle Lösung durch Ansatz $y(x) = ax^2 + bx + c$

$$y'(x) = 2ax + b, \quad y''(x) = 2a$$

also $\quad 2a - (2ax + b) - 6(ax^2 + bx + c) = 18x^2 - 1$

$$-6ax^2 + (-2a - 6b)x + (2a - b - 6c) = 18x^2 - 1$$

$-6a = 18$, also $\underline{a = -3}$

$-2a - 6b = 0$, also $6b = -2a = 6$, also $\underline{b = 1}$

$2a - b - 6c = -1$ also $-6 - 1 - 6c = -1$, also $\underline{c = -1}$.

Somit $\quad y(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-2x} + (-3x^2 + x - 1)$

$$y'(x) = 3c_1 e^{3x} - 2c_2 e^{-2x} + (-6x + 1)$$

$y(0)$: $\quad c_1 + c_2 - 1 = 1$, $\quad c_1 + c_2 = 2$

$y'(0)$: $\quad 3c_1 - 2c_2 + 1 = 2$, $\quad 3c_1 - 2c_2 = 1$

Löse: $c_1 = 1$, $c_2 = 1$

$$y(x) = e^{3x} + e^{-2x} + (-3x^2 + x - 1)$$

Aufgabe 4: 8P a) $f(z) = z + \overline{z}$

Berechne die Ableitungsmatrix der Funktion $f(z) = (u(x,y), v(x,y))$ von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ $(z = x+iy)$

$$f(z) = z + \overline{z} = 2x$$

also $u(x,y) = 2x$
$v(x,y) = 0$, damit $Df = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

man sieht ist reell diffbar,
aber $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, somit nicht komplex diffbar (Cauchy-Riem. DGL).
3

b) keine Stammfkt., deshalb ausrechnen!

$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = t \cdot (1+i)$

also $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\,dt =$ 2

$$\int_0^1 2 \cdot t \cdot (1+i)\,dt = (1+i)\left[t^2\right]_0^1 = \underline{\underline{(1+i)}}$$

c) $\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = t + i \cdot t^2$

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\,dt = \int_0^1 2t\,(1+2it)\,dt$$ 3

$$= \int_0^1 (2t + 4it^2)\,dt = \left[t^2 + \frac{4}{3} i t^3\right]_0^1 = \underline{\underline{1 + \frac{4}{3} i}}$$

(Vergleich von b), c) zeigt noch einmal, dass $f(z)$ nicht komplex diffbar)

6

<u>Aufgabe 5</u> $\qquad g(z) = \dfrac{1}{z^3+z}$

6P

a) Pole und Residuen:

$$z^3+z = z(z^2+1) = z(z+i)(z-i)$$

Pole bei $z = 0, i, -i$ $\quad$ 1,5

Residuen durch Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-i}$$

dann: $\qquad 1 = A(z^2+1) + B(z^2-iz) + C(z^2+iz)$

$$1 = z^2(A+B+C) + z(-iB+iC) + A$$

somit $\underline{A = 1}$; $\quad B = C$ und $1 + 2B = 0$, also $\underline{B = -\frac{1}{2}}$, $\underline{C = -\frac{1}{2}}$

$$g(z) = \frac{1}{z} + \frac{-\frac{1}{2}}{z+i} + \frac{-\frac{1}{2}}{z-i}$$

also $\quad \mathrm{Res}(g(z),0) = A = 1$

$\qquad \mathrm{Res}(g(z),i) = C = -\frac{1}{2}$

$\qquad \mathrm{Res}(g(z),-i) = B = -\frac{1}{2}$

Residuen durch „einsetzen“ (Alternative, da Pole alle einfach)

$$\mathrm{Res}(g(z),0) = \frac{z}{g(z)}(0) = \frac{1}{z^2+1}(0) = \underline{1}$$

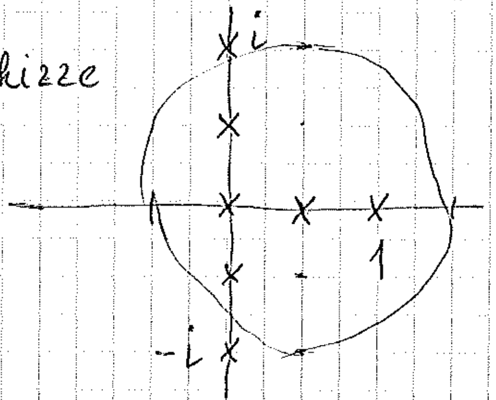
$$\mathrm{Res}(g(z),i) = \frac{z-i}{g(z)}(i) = \frac{1}{z(z+i)}(i) = \frac{1}{i\cdot 2i} = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}(g(z),-i) = \frac{z+i}{g(z)}(-i) = \frac{1}{z(z-i)}(-i) = \frac{1}{(-i)(-2i)} = -\frac{1}{2}.$$

2,5

b) Man muss nur schauen, welche Pole im Kreis liegen.

Skizze



0 liegt innerhalb, da $\left|0-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$

i liegt außerhalb, da $\left|i-\frac{1}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} > 1$

-i liegt außerhalb, da $\left|-i-\frac{1}{2}\right| = \sqrt{\frac{5}{4}} > 1$.

Deshalb
$$\int_K g(z)\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(g(z), 0) = \underline{\underline{2\pi i}}$$

2