KLAUSUR

Mathematik III für Mechatroniker

21. September 2012

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:	Versuch Nr.:

Unterschrift:

Für jede der Aufgaben gibt es 10 Punkte.
Zum Bestehen der Klausur sind 22 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Man löse für $x \in [-2, 0]$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x^2 y'(x) + y(x) &= x y'(x)\,, \\ y(-1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   und skizziere die Lösung.

2. Die Ellipsenschar sei durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{4} + Ay^2 = 1 \quad (A > 0)$$

   gegeben. Man Bestimme die Gleichung der zugehörigen Orthogonaltrajektorien. Man skizziere die beiden Kurvenscharen.

3. Man löse die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 4x^2 - 4x + 2\ .$$

   Man löse das Anfangswertproblem mit $y(0) = 5$ und $y'(0) = -4$.

4. (a) Gegeben sei die komplexe Funktion

$$f(z) = e^{iz^2}\ .$$

   (i) Man bestimme der Realteil $u(x, y)$ sowie der Imaginärteil $v(x, y)$ von $f(z)$. (Hiw: $z = x + i\,y$)

   (ii) Sei

$$g(x, y) = u(x, y) \cdot v(x, y) \cdot e^{4xy}\ .$$

   Man berechne $g_{xx} + g_{yy}$ und entscheide ob $g(x, y)$ harmonisch ist.

   (b) Man berechne das Integral

$$\int_\Gamma \frac{1}{1+z} dz$$

   wobei Γ die geschlossene Kreislinie mit dem Radius 2 um den Ursprung sei.

(bitte wenden)

5. (a) Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{\cos(z^2) - 1}{z^9} \; .$$

(i) Man entwickle $\cos(z^2)$ in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$ und leite hieraus eine Entwicklung ine iene Laurentreihe von f auch um $z_0 = 0$.
(Hiw: $\cos(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$).

(ii) Man benutze (i) um das Residuum von $f(z)$ an $z = 0$ zu bestimmen.

(iii) Man bestimme das Integral $\int_\Gamma f(z)dz$ wobei Γ die Kreislinie um den Nullpunkt von Radius 1 sei.

(b) Man berechne das Integral $\int_\Gamma z^2 dz$ wobei Γ die Kreislinie um den Nullpunkt von Radius 3 sei.

Lösungen:

1.

$$x^2y'(x) + y(x) = xy'(x) \iff (x^2 - x)y'(x) = -y(x)$$

Bei der Differentialgleichung $(x^2 - x)y'(x) = -y(x)$ lassen sich die Variablen trennen. Wir erhalten mit einer Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{-1}{x^2 - x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x \quad ,$$

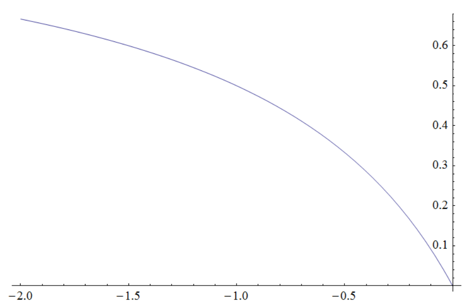
$$\Longrightarrow \ln y = \ln|x| - \ln|x-1| + \ln C = \ln\left(C\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)$$

also wegen $x \in [-2, 0]$

$$y = C\left(\frac{x}{x-1}\right) \ .$$

Die Gleichung $y(-1) = \frac{1}{2}$ liefert $C = 1$, somit ist die gesuchte Lösung

$$y(x) = \frac{x}{x-1} \, .$$



Skizze von $y(x) = \dfrac{x}{x-1}$ auf [-2, 0]

2.

Ableiten der Gleichung

$$\frac{x^2}{4} + Ay^2 = 1$$

der Ellipsenschar liefert

$$\frac{x}{2} + 2yy'A = 0 \, .$$

Durch Elimination von A in der beiden Gleichungen erhält man

$$\frac{-x}{4yy'} = A = \frac{4 - x^2}{4y^2}$$

Die Auflösung nach y' liefert

$$y' = \frac{-xy}{4-x^2}$$

Die Orthogonaltrajektorien erfüllen also die Differentialgleichung

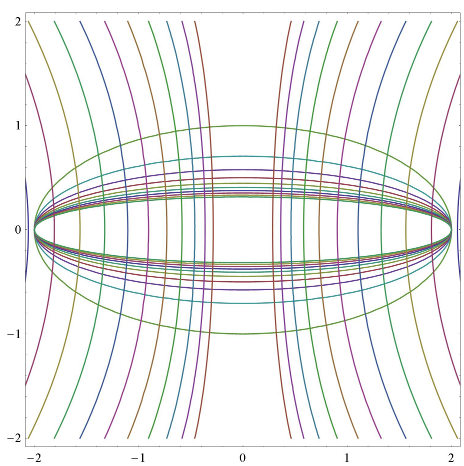
$$y'(x) = \frac{4-x^2}{xy}$$

Trennung der Variablen liefert

$$\int y \mathrm{d}y = -\int x \mathrm{d}x + \int \frac{4}{x} \mathrm{d}x \ .$$

Dies liefert die Gleichung der zugehörigen Orthogonaltrajektorien

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + 4\ln|x| + C \ .$$



Skizze der beiden Kurvenscharen

3.

Zunächst lösen wir das homogene System $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$ mit Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

Somit erhalten wir laut Vorlesung die Lösungsbasis $y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{2x}$.

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhalten wir durch den Ansatz $y(x) = a\,x^2 + b\,x + c$. Es gilt $y'(x) = 2ax + b$ und $y''(x) = 2a$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert $2a - 6\,a\,x - 3\,b + 2a\,x^2 + 2bx + 2c = 4x^2 - 4\,x + 2$. Koeffizientenvergleich ergibt: $a = 2, b = 4, c = 5$.

Also ist $y(x) = A\,e^x + B\,e^{2x} + 2x^2 + 4x + 5$ und $y'(x) = A\,e^x + 2B\,e^{2x} + 4\,x + 4$. Somit ist $y(0) = 5 \iff A + B = 0$, also $A = -B$, und $y'(0) = -4 \iff A + 2B = -8 \implies A = 8, B = -8$. Die gesuchte Lösung des AWP ist also $y(x) = 8e^x - 8x^{2x} + 2x^2 + 4x + 5$.

4.

(a) (i)

$$f(z) = e^{iz^2} = e^{i(x+iy)^2} = e^{i(x^2-y^2+2ixy)} = e^{i(x^2-y^2)-2xy} = e^{i(x^2-y^2)}e^{-2xy}$$

$$\implies f(z) = \left(\cos(x^2 - y^2) + i\sin(x^2 - y^2)\right) e^{-2xy}$$

Damit haben wir

$$u(x, y) = e^{-2xy}\cos(x^2 - y^2) \quad \text{und} \quad v(x, y) = e^{-2xy}\sin(x^2 - y^2)\ .$$

(ii)

$$g(x, y) = u \cdot v \cdot e^{4xy} = e^{-2xy}\cos(x^2 - y^2) \cdot e^{-2xy}\sin(x^2 - y^2) \cdot e^{4xy}$$

$$\implies g(x, y) = \cos(x^2 - y^2) \cdot \sin(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}\sin(2x^2 - 2y^2)\ .$$

$$g_x = 2x\cos(2x^2 - 2y^2), \quad g_{xx} = -8x^2\sin(2x^2 - 2y^2)\ .$$

$$g_y = -2y\cos(2x^2 - 2y^2), \quad g_{yy} = -8y^2\sin(2x^2 - 2y^2)\ .$$

$$g_{xx} + g_{yy} = 8(x^2 + y^2)\sin(2x^2 - 2y^2)\ .$$

Da $g_{xx} + g_{yy} \neq 0$ ist, ist $g(x, y)$ nicht harmonisch.

(b)

$$\int_\Gamma \frac{1}{1+z}dz = 2\pi i\ ,$$

da die Funktion $H(z) = \frac{1}{z+1}$ einen einfachen Pol bei $z = -1$ in inneren der Kreislinie hat, mit dem Residuum 1. Nach dem Residuumsatz ergibt sich das Resultat. (Alternativ ist der Cauchyscher Integralsatz.)

5.

(a) (i) Potenzreihe um $z_0 = 0$ von $\cos(z^2)$.

$$\cos(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z^2)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{4k}}{(2k)!}$$

$$\Longrightarrow \cos(z^2) = 1 - \frac{z^4}{4} + \frac{z^8}{24} - \frac{z^{12}}{720} + \cdots$$

Laurentreihe um $z_0 = 0$ von $f(z)$.

$$f(z) = \frac{\cos(z^2) - 1}{z^9} = \frac{\left(1 - \frac{z^4}{4} + \frac{z^8}{24} - \frac{z^{12}}{720} + \cdots\right) - 1}{z^9} = \frac{\frac{z^4}{4} + \frac{z^8}{24} - \frac{z^{12}}{720} + \cdots}{z^9}\,.$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{-1}{2}\frac{1}{z^5} + \frac{1}{24}\frac{1}{z} - \frac{11}{720} z^3 + \cdots$$

(ii) Man kann in (i) ablesen, dass das Residuum von $f(z)$ an $z = 0$ der Koeffizient von $\frac{1}{z}$ ist. D.h. das gesuchte Residuum ist $\frac{1}{24}$. ($\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{24}$).

(iii) Berechnung von

$$\int_\Gamma f(z)dz\,.$$

$$z = 0 \in \Gamma \quad \Longrightarrow \int_\Gamma \frac{1}{1+z} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{24} = \frac{\pi}{12} i\,.$$

(b) Berechnung von

$$\int_\Gamma z^2 dz\,.$$

$f(z) = z^2$ ist eine holomorphe Funktion, Γ ist eine geschlossene Jordan-Kurve (Cauchyscher Integralsatz)

$$\int_\Gamma z^2 dz = 0$$