Universität Kassel
Fakutät 10/16
PD Dr. Sebastian Petersen 21.09.2017

Klausur zur Vorlesung

Mathematik III (Differentialgleichungen und Funktionentheorie)

Version mit Lösungsskizzen

Es können 30 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

a) Berechnen Sie die maximale Lösung von dem Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{1}{6}e^x y^4,\ y(0) = 1$$

auf dem Gebiet $\mathbb{R}\times\,]0, \infty[$.

b) Berechnen Sie die maximale Lösung von dem Anfangswertproblem

$$y' = x^{-1}y + x^4,\ y(1) = 3$$

auf dem Gebiet $]0, \infty[\, \times \mathbb{R}$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 1.

a) Es geht in Teil a) um eine DGL mit getrennten Variablen. Der wohlbekannte Ansatz führt auf

$$\begin{aligned}\int_1^y -6s^{-4}ds = \int_0^x e^t dt &\Leftrightarrow [2s^{-3}]_{s=1}^y = [e^t]_{t=0}^x \\ &\Leftrightarrow 2y^{-3} - 2 = e^x - 1 \\ &\Leftrightarrow 2y^{-3} = e^x + 1 \\ &\Leftrightarrow y^{-3} = \frac{e^x + 1}{2} \\ &\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{2}{e^x + 1}}\end{aligned}$$

Die maximale Lösung von dem AWP in Teil a) ist

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{e^x + 1}}.$$

Alternativer Weg: Man rechnet zunächst etwas informal und ohne Grenzen wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}e^x y^4 &\to \int -6y^{-4}dy = \int e^x dx \\ &\to 2y^{-3} = e^x + C\end{aligned}$$

Wegen $y(0) = 1$ folgt $2y(0)^{-3} = e^0 + C$ und damit $2 = 1 + C$, d.h. $C = 1$. Also folgt $2y^{-3} = e^x + 1$ und damit kommt man ebenfalls auf die maximale Lösung

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{e^x + 1}},\ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

von dem AWP in Teil a).

b) Hier geht es um die inhomogen-lineare DGL erster Ordnung

$$y' = \underbrace{x^{-1}}_{=:a(x)} y + \underbrace{x^4}_{=:b(x)}, y(1) = 3.$$

Mit der Hilfsfunktion

$$\varphi(x) = \exp\left(\int_1^x a(t)dt\right) = \exp([\ln(t)]_{t=1}^x) = \exp(\ln(x)) = x$$

liefert die Methode der Variation der Konstanten, dass die maximale Lösung von dem AWP in b) durch

$$\begin{aligned}
\psi(x) = \varphi(x)\left(3 + \int_1^x \varphi(t)^{-1}b(t)dt\right) &= \\
= x\left(3 + \int_1^x t^{-1}t^4 dt\right) &= \\
= x\left(3 + \int_1^x t^3 dt\right) &= \\
= x\left(3 + \left[\frac{1}{4}t^4\right]_{t=1}^x\right) &= \\
= x(3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}) = x(\frac{11}{4} + \frac{1}{4}x^4)&
\end{aligned}$$

($\varphi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$) gegeben ist.

Aufgabe 2 (2+4=6 Punkte)

a) Wir betrachten die homogen-lineare Differentialgleichung 4. Ordnung

$$y'''' - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0 \qquad (\mathscr{L})$$

Wir geben bekannt, dass das charakeristische Polynom von $(\mathscr{L})$ durch

$$P(T) = T^4 - T^3 - 3T^2 + 5T - 2 = (T-1)^3(T+2)$$

gegeben ist. Geben Sie nun ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem zu $(\mathscr{L})$ an. (*Hinweis:* Bei dieser Teilaufgabe ist kaum etwas zu rechnen!)

b) Berechnen Sie ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem zu dem homogen-linearen System

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} y \qquad (\mathscr{S})$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 2.

a) Das charakteristische Polynom von $(\mathscr{L})$ hat 1 als 3-fache und -2 als 1-fache Nullstelle. Also ist (nach einem wohlbekannten Satz) durch

$$(e^x, xe^x, x^2e^x, e^{-2x})$$

ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem zu $(\mathscr{L})$ gegeben.

b) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ die Systemmatrix von $(\mathscr{L})$. Das charakteristische Polynom von A ist $P_A(T) = T^2 + T - 6$ und mit der pq-Formel sieht man, dass $P_A(T) = (T+3)(T-2)$ gilt. Das Spektrum[1] von A ist $\mathbb{S} = \{-3, 2\}$. Wir berechnen die Eigenräume.

$$\mathbb{L}(A+3E) = \mathbb{L}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \mathbb{L}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{L}(A-2E) = \mathbb{L}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \mathbb{L}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also ist durch

$$\phi(x) = \left(e^{-3x}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2e^{-3x} & e^{2x} \\ 3e^{-3x} & e^{2x} \end{pmatrix}$$

ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem zu $(\mathscr{S})$ gegeben.

[1] Die Menge der Eigenwerte wird gemeinhin als Spektrum bezeichnet.

Aufgabe 3 (2+3+1=6 Punkte)
Wir betrachten die inhomogen-lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + 6y' - 7y = x + 1 \tag{$\mathscr{I}$}$$

a) Berechnen Sie ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem zu dem homogen-linearen Anteil

$$y'' + 6y' - 7y = 0 \tag{$\mathscr{H}$}$$

von $(\mathscr{I})$.

b) Finden Sie eine partikuläre Lösung von der inhomogen-linearen DGL $(\mathscr{I})$.

c) Geben Sie nun die allgemeine Lösung von $(\mathscr{I})$ an.

Lösungsskizze zu Aufgabe 3.

a) Das charakteristische Polynom von $(\mathscr{H})$ ist $P(T) = T^2 + 6T - 7 = (T - 1)(T + 7)$ (pq-Formel!). Seine Nullstellen sind 1 und -7 (jeweils 1-fach). Also ist (e^x, e^{-7x}) ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem zu $(\mathscr{H})$.

b) Mit dem Ansatzverfahren kann man eine partikuläre Lösung von

$$y'' + 6y' - 7y = r(x)e^{\omega x} \tag{$*$}$$

bestimmen, wenn $r(x)$ ein Polynom ist. Wir benutzen dieses Verfahren im Fall $r(x) = x + 1$, $\omega = 0$. Ist v die Vielfachheit von ω als Nullstelle von $P(T)$, so gibt es nach dem Ansatzverfahren eine Lösung von $(*)$ der Form $x^v R(x)e^{\omega x}$, wobei $R(x)$ ein Polynom vom selben Grad wie $r(x)$ ist.

Bei uns ist $\omega = 0$ und wegen $P(\omega) = -7 \neq 0$ ist $v = 0$. Wir machen also den Ansatz

$$\psi(x) = ax + b$$

und versuchen $a, b \in \mathbb{R}$ so zu wählen, dass $\psi(x)$ eine Lösung von $(\mathscr{I})$ ist.

$$\begin{aligned}
\psi \text{ erfüllt } (\mathscr{I}) &\Leftrightarrow \psi''(x) + 6\psi' - 7\psi = x + 1 \\
&\Leftrightarrow 6a - 7(ax + b) = x + 1 \\
&\Leftrightarrow -7ax + (6a - 7b) = x + 1 \\
&\Leftrightarrow -7a = 1 \wedge 6a - 7b = 1 \\
&\Leftrightarrow a = -\frac{1}{7} \wedge 7b = 6a - 1 = -\frac{13}{7}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{7} \wedge b = -\frac{13}{49}$$

Es ist also $\psi(x) = -\frac{1}{7}x - \frac{13}{49}$ eine Lösung von $(\mathscr{I})$.

c) Die allgemeine Lösung von $(\mathscr{I})$ ist

$$f_c(x) = -\frac{1}{7}x - \frac{13}{49} + c_1 e^x + c_2 e^{-7x} \quad (c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 4 (2+2+2=6 Punkte) Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, 3i\} \to \mathbb{C}, \ f(z) = \frac{1}{z(z-3i)}.$$

a) Berechnen Sie für jeden Pol z_0 von f das Residuum $\operatorname{Res}_{z_0}(f)$.

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int\limits_{|z|=1} f(z)dz$.

(ii) $\int\limits_{|z|=10} f(z)dz$.

(Hinweis: Residuensatz!)

c) Berechnen Sie die Laurent-Entwicklung von f im Entwicklungspunkt $z_0 := 0$. (*Hinweis:* Benutzen Sie zunächst die geometrische Reihe, um die Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{z-3i}$ aufzudecken!)

Lösungsskizze zu Aufgabe 4.

a)

$$\operatorname{Res}_0(f) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z-3i} = \frac{1}{-3i} = \frac{1}{3}i$$
$$\operatorname{Res}_{3i}(f) = \lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z) = \lim_{z\to 3i}\frac{1}{z} = \frac{1}{3i} = -\frac{1}{3}i$$

b) (i) Hier wird nur der Pol 0 von dem Integrationsweg umlaufen. Der Residuensatz liefert

$$\int\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0(f) = -\frac{2\pi}{3}.$$

(ii) Hier werden beide Pole von dem Integrationsweg umlaufen. Der Residuensatz liefert

$$\int\limits_{|z|=10} f(z)dz = 2\pi i(\operatorname{Res}_0(f) + \operatorname{Res}_{3i}(f)) = 0.$$

c) Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-3i} = \frac{-1}{3iz}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3i}} =$$
$$= \frac{-1}{3iz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(3i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^{n-1}}{(3i)^{n+1}} = \sum_{n=-1}^{\infty} -\frac{1}{(3i)^{n+2}}z^n$$

für $|z| < 3$. (Man kann das noch weiter “verschönern” zu

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+2}} i^{3n} z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+2}} (-1)^n i^n z^n$$

o.ä.)

Aufgabe 5 (2+2+2=6 Punkte)

a) Was ist die größte offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, auf der die Laurent-Entwicklung im Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ der Funktion

$$g : \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 4i, 1+i\},\ g(z) = \frac{z^2+3}{z(z^2+16)(z-(1+i))}$$

konvergiert? (*Anmerkung:* Es ist nicht verlangt, diese Laurent-Entwicklung zu berechnen!)

b) Was ist die größte offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, auf der die Laurent-Reihe

$$\sum_{n=-2}^{\infty} \left(\frac{1+in}{3+n}\right)^n (z-1)^n$$

konvergiert? (*Hinweis:* Berechnen Sie zunächst den Konvergenzradius des Hauptteils z.B. mit dem Wurzelkriterium.)

c) Entscheiden Sie (mit Begründung!), ob die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{\overline{z}}{2|z|^2}$$

holomorph ist.

Lösungsskizze zu Aufgabe 5.

a) Sei R die gesuchte Menge. Die Punkte $0, \pm 4i$ und $(1+i)$ sind Pole von f. Die gesuchte Menge R ist der größte offene Kreisring, der ganz in $\mathbb{C} \setminus \{0, \pm 4i, 1+i\}$ enthalten ist. (Diese Aussage ist Teil des Laurent-Entwicklungssatzes.)

Anhand einer kleinen Skizze sieht man leicht, dass

$$R = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \sqrt{2}\}$$

gilt. (R ist also eine bei 0 punktierte offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt 0 und Radius $\sqrt{2}$.)

b) Sei D die gesuchte Menge. Sei $a_n = \left(\frac{1+in}{3+n}\right)^n$. Dann ist

$$L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1+in}{3+n}\right| = |i| = 1$$

und daher ist $\rho = L^{-1} = 1$ der Konvergenzradius des Hauptteils (nach dem Wurzelkriterium von Cauchy-Hadamard). Der Nebenteil konvergiert auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Daher ist D die punktierte Kreisscheibe

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}.$$

c) *Weg 1.* Es ist $f(z) = \frac{\overline{z}}{2z\overline{z}} = \frac{1}{2z} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und daher ist f holomorph (nach der Quotientenregel).

Weg 2. Es gilt $f(x+iy) = \frac{x-iy}{2(x^2+y^2)}$ und damit folgt

$$\begin{aligned}
u(x,y) &:= \mathrm{Re} f(x+iy) = \frac{x}{2(x^2+y^2)} \\
v(x,y) &:= \mathrm{Im} f(x+iy) = \frac{-y}{2(x^2+y^2)} \\
\partial_x u(x,y) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\
\partial_y u(x,y) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \\
\partial_x v(x,y) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \\
\partial_y v(x,y) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Man sieht, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Also ist f auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph.