KLAUSUR

Mathematik III für Mechatroniker

23. März 2012

(W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:	Versuch Nr.:

Unterschrift:

Für jede der Aufgaben gibt es 10 Punkte.
Zum Bestehen der Klausur sind 22 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Lösen Sie für $x \in (-1, 1)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y(x)}{1-x^2}, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

   und skizzieren Sie die Lösung.

2. Die Ellipsenschar sei durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = A \quad (A > 0)$$

   gegeben. Bestimmen Sie die Gleichung der zugehörigen Orthogonaltrajektorien. Skizzieren Sie die beiden Kurvenscharen.

3. Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^2 - 3x + 1 \,.$$

   Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = 3$.

4. Es sei $z = x + i\,y$, $f(z) = \sin(z)\,\cos(z)$ und $u(x, y) = \text{Re}\, f(z)$. Berechnen Sie

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)$$

   und zeigen Sie mit Ihrer Rechnung, dass die Funktion $u(x, y)$ harmonisch ist. Hinweis: Es gelten die Formeln

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \text{und} \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\,\cos(a)\,,$$

$$\cos(iz) = \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad \text{und} \quad \sin(iz) = i \sinh z = \frac{i}{2}(e^z - e^{-z})\,,$$

$$\sinh(x)' = \cosh(x) \quad \text{und} \quad \cosh(x)' = \sinh(x)\,.$$

5. Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) = 2\,z + \frac{z+1}{z^2+z-6}\ .$$

(a): Bestimmen Sie alle Pole von $f(z)$ und deren Residuen.
(b): Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

wobei der Kreis $\Gamma = \{z|\ |z-(2+i)| = 2\}$ mit Mittelpunkt $2+i$ und Radius 2 einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werde.

Lösungen:

1. Bei der Differentialgleichung $y'(x) = \frac{y(x)}{1-x^2}$ lassen sich die Variablen trennen. Wir erhalten mit einer

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\ ,$$

also (wegen $|x| < 1$) für $y > 0$

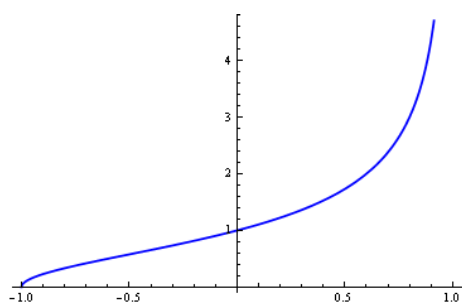
$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) + \ln C = \ln\left(C\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

bzw.

$$y = C\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ .$$

Die Gleichung $y(0) = 1$ liefert $C = 1$, also ist die gesuchte Lösung

$$y(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ .$$



Die Lösung $y(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

2. Ableiten der Gleichung

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = A$$

der Ellipsenschar liefert

$$x + 2yy' = 0\ .$$

Lösen wir dies nach y' auf, erhalten wir

$$y'(x) = -\frac{x}{2y}\ .$$

Die Orthogonaltrajektorien erfüllen also die Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{2y}{x} \; .$$

Trennung der Variablen liefert

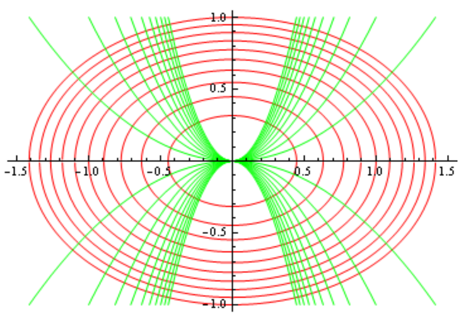
$$\int \frac{1}{2y} \, \mathrm{d}y = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \; .$$

Dies liefert die Gleichung der zugehörigen Orthogonaltrajektorien

$$\frac{1}{2} \ln y = \ln x + C' \; .$$

Auflösen nach y ergibt

$$y(x) = C\, x^2 \; .$$



Die Ellipsenschar und ihre Orthogonaltrajektorien

3. Zunächst lösen wir das homogene System $y'' - 2y' + y = 0$. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ mit doppelter Nullstelle 1.
Somit erhalten wir laut Vorlesung die Basis $y_1(x) = e^x, y_2(x) = x\, e^x$.

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhalten wir durch den Ansatz $y(x) = a\, x^2 + b\, x + c$. Es gilt $y'(x) = 2ax + b$ und $y''(x) = 2a$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert $2a - 4\, a\, x - 2\, b + a\, x^2 + bx + c = x^2 - 3\, x + 1$. Koeffizientenvergleich ergibt: $a = b = c = 1$.

Also ist $y(x) = A\, e^x + B\, x\, e^x + x^2 + x + 1$ und $y'(x) = A\, e^x + B\, e^x + B\, x\, e^x + 2\, x + 1$. Somit ist $y(0) = A + 1 = 2$, also $A = 1$, und $y'(0) = A + B + 1 = B + 2 = 3$, also $B = 1$. Die gesuchte Lösung des AWP ist also $y(x) = e^x + x\, e^x + x^2 + x + 1$.

4. Wegen $\sin(2z) = 2\,\sin(z)\,\cos(z)$ ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\sin 2(x+iy) = \frac{1}{2}\sin(2x+2iy) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x)\cos(2iy) + \frac{1}{2}\cos(2x)\sin(2iy) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x)\cosh(2y) + i\,\frac{1}{2}\cos(2x)\sinh(2y)\ . \end{aligned}$$

Für Real- und Imaginärteil erhalten wir also

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\sin(2x)\cosh(2y) \qquad \text{und} \qquad v(x,y) = \cos(2x)\sinh(2y)(2xy)\ .$$

Also sind

$$\begin{gathered} u_x(x,y) = \cos(2x)\cosh(2y)\ , \\ u_{xx}(x,y) = -2\sin(2x)\cosh(2y)\ , \\ u_y(x,y) = \sin(2x)\sinh(2y)\ , \\ u_{yy}(x,y) = 2\sin(2x)\cosh(2y)\ . \end{gathered}$$

Es folgt $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Also ist u harmonisch.

5. Wir bestimmen eine Partialbruchzerlegung von $\frac{z+1}{z^2+z-6}$. Wegen $z^2 + z - 6 = (z-2)(z+3)$ nehmen wir den Ansatz

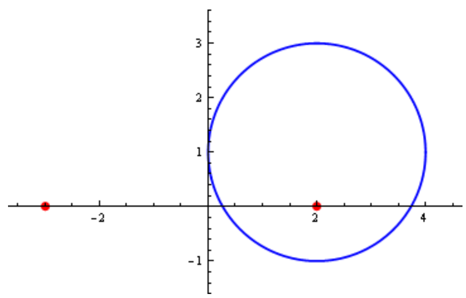
$$\frac{z+1}{z^2+z-6} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+3}$$

und bestimmen $A = \frac{3}{5}$ und $B = \frac{2}{5}$. Daher sind

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \frac{3}{5} \quad \text{und} \quad \operatorname*{Res}_{z=-3} f(z) = \frac{2}{5}\ .$$

Der Pol bei $z = 2$ liegt im Inneren des Kreises Γ, der Pol bei $z = -3$ aber nicht. Der Residuensatz liefert daher

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\,i \operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \frac{6\pi\,i}{5}\ .$$



Die Kurve Γ und die Pole von $f(z)$