KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker/Mechatroniker

23.9.2011

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 6 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Gegeben sei die Differenzialgleichung:

$$y' = -y\,(1+y^2)\,.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung?

2. Die Funktionen: $e^x\,,\, x\,e^x\,,\, e^{2\,x}\ \cos(3\,x)\,,\, e^{2\,x}\ \sin(3\,x)$ sind Lösungen der Differenzialgleichung:

$$y^{(4)} + a_3\,y''' + a_2\,y'' + a_1\,y' + a_0\,y = 0\,.$$

Bestimmen Sie die Konstanten a_0, a_1, a_2, a_3.

3. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} Y\,, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

4. Gegeben ist die Funktion:

$$f(z) = \frac{1}{z}\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Bestimmen Sie die Bildmenge von $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \arg(z) < \frac{1}{2}\,\pi\}$ und von $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 3\,, \frac{1}{4}\,\pi < \arg(z) < \frac{3}{4}\,\pi\}$. Zeichnen Sie eine Skizze!

5. Gegeben sind die Kurven : $\Gamma_1 : z(t) = r_0\,e^{t\,i}\,, t \in [0, 2\,\pi]$ und $\Gamma_2 : z(t) = -i + 3\,t\,i\,, t \in [0,1]$. Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz$ und $\int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz$ über die Funktion $f(z) = |z|$.

Lösungen

1.) Trennung der Veränderlichen für $y(x) \neq 0$:

$$\int \frac{1}{y\,(1+y^2)}\,dy = -\int dx\,.$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{y\,(1+y^2} = \frac{A}{y} + \frac{B\,y + C}{1+y^2} = \frac{(A+B)\,y^2 + C\,y + A}{},$$

also $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$.

$$\int \frac{1}{y\,(1+y^2)}\,dy = \ln(|y|) - \frac{1}{2}\,\ln(1+y^2) = -x + c\,.$$

Hieraus folgt:

$$\ln(|y|\,(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}) = -x + c$$

bzw.

$$|y|\,(1+y^2)^{-\frac{1}{2}} = e^{-x+c}\,.$$

Auflösen ergibt:

$$y(x) = \pm\frac{e^{-\frac{1}{2}\,(x+c)}}{\sqrt{1-e^{-(x+c)}}}\,.$$

Hinzu kommt noch die Lösung $y(x) = 0$.

2.) Das charakteristische Polynom lautet:

$$(\lambda-1)^2\,(\lambda-(2+3\,i))\,(\lambda-(2-3\,i)) = (\lambda-1)^2\,(\lambda^2-4\,\lambda+13) = \lambda^4-6\,\lambda^3+22\,\lambda^2-30\,\lambda+13\,.$$

Wir bekommen die Differenzialgleichung:

$$y(4) - 6\,y''' + 22\,y'' - 30\,y' + 13\,y = 0\,.$$

3) Das charakteristische Polynom lautet:

$$\det(A - \lambda\,E) = A = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-5)\,(\lambda-1) = 0\,.$$

Die Matrix A besitzt folgende Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 5\,, \quad \lambda_2 = 1\,.$$

Wir bekommen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

und zugehörige Eigenvektoren $(1, 1)$, $(-3, 1)$. Damit ergibt sich ein Fundamentalsystem:

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x}.$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x}.$$

Für $x = 0$ gilt:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ds System besitzt die Lösung:

$$c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}.$$

4) Wir schreiben für $z \neq 0$:

$$z = |z| \, e^{\arg(z)\, i}, \quad -\pi < \arg(z) < \pi,$$

und bekommen:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}, e^{\arg(z)\, i}.$$

Der Sektor

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \arg(z) < \frac{1}{2}\pi\}$$

wird abgebildet auf den Sektor:

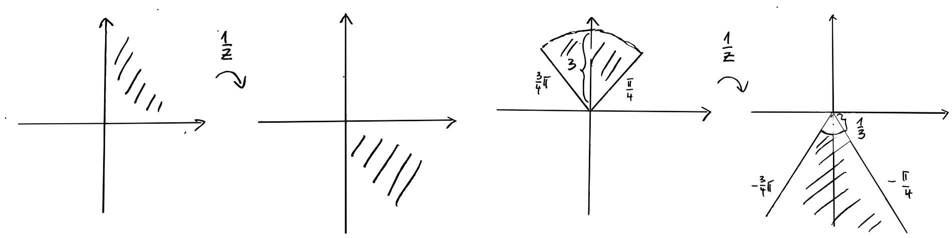
$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, -\frac{1}{2}\pi < \arg(z) < 0\}.$$

Der Sektor

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 3, \frac{3}{4}\pi < \arg(z) < \frac{1}{4}\pi\}$$

wird abgebildet auf:

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > \frac{1}{3}\,, -\frac{3}{4}\,\pi < \arg(z) < -\frac{1}{4}\,\pi\}\,.$$



Bildmengen unter $f(z) = \frac{1}{z}$

5) Es gilt:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \left|r_0\,e^{t\,i}\right|\, r_0\,i\,e^{t\,i}\,dt = r_0^2\,2\,\pi\,i$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz &= \int_0^1 |-i + 3\,t\,i|\,3\,i\,dt = 3\,i \int_0^1 |-1 + 3\,t|\,dt \\
&= 3\,i \left(\int_0^{\frac{1}{3}} (1 - 3\,t)\,dt + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} (-1 + 3\,t)\,dt \right) \\
&= 3\,i \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \right) = \frac{5}{2}\,i\,.
\end{aligned}$$