KLAUSUR

Mathematik IV

10. 9. 2003

Wolfram Koepf

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben
und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei folgende Tabelle von Stützstellen und Stützwerten:

j	1	2	3	4
x_j	1	2	3	4
y_j	1	4	9	17

   (a) **(4P)** Bestimmen Sie das zugehörige Interpolationspolynom.
   (b) **(1P)** Geben Sie an, wie sich die Folge für $j = 5, \ldots, 10$ weiterentwickelt.
   (c) **(4P)** Zeigen Sie, dass das Interpolationspolynom für alle positiven ganzen Zahlen ganzzahlige Werte besitzt.
   (d) **(1P)** Was antworten Sie, wenn Sie nach dem nächsten Glied der Folge $1, 4, 9, \ldots$ gefragt werden?

2. **(4P)** Man bestimme die Kreiszahl π auf 6 Dezimalstellen durch Anwendung des Newtonverfahrens auf die Funktion $f(x) = \cos x$.

3. **(5P)** Gegeben sei die Wertetabelle

j	1	2	3	4	5	6	7
x_j	1	2	4	6	8	8	9
y_j	2	4	6	8	10	11	13

   Man bestimme die Regressionsgerade nach der Gaußschen Fehlerquadratmethode.

4. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \cos(x \cdot y) , \qquad y(0) = 1 .$$

   (a) **(5P)** Wenden Sie das Euler-Cauchy-Verfahren mit $h = 0{,}1$ im Intervall $[0, 1]$ an.
   (b) **(2P)** Stellen Sie die erhaltene Approximationslösung graphisch dar.

Lösungen

1.) Das Interpolationspolynom in der Form von Lagrange ergibt sich zu

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{(2-x)\ (3-x)\ (4-x)}{6} + 2\ (3-x)\ (4-x)\ (-1+x) \\ &\quad + \frac{9\ (4-x)\ (-2+x)\ (-1+x)}{2} + \frac{17\ (-3+x)\ (-2+x)\ (-1+x)}{6} \\ &= -1 + \frac{11\,x}{6} + \frac{x^3}{6} \end{aligned}$$

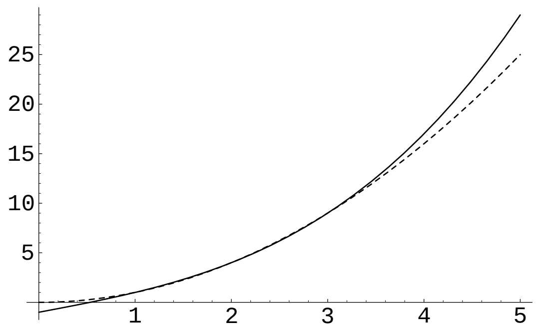
(b): Die Folge entwickelt sich gemäß $1, 4, 9, 17, 29, 46, 69, 99, 137, 184, \ldots$.
(c) Die Aussage stimmt für $j = 1$ (Induktionsanfang). Sei also $L_3(x)$ eine ganze Zahl. Dann müssen wir nachweisen, dass die Zahl

$$g(x) := L_3(x+1) - L_3(x) = 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}$$

wieder eine ganze Zahl ist. Dies sieht man aus der Darstellung

$$g(x) = 2 + \frac{x(x+1)}{2}\ ,$$

denn eine der beiden Zahlen x bzw. $x+1$ muss gerade sein.
(d): Auf den ersten Blick sieht die Folge wie die Quadratzahlen aus. Sie kann sich aber auch gemäß einem anderen mathematischen Gesetz anders weiterentwickeln. Ein Beispiel dieser Art ist das berechnete Lagrangepolynom vom Grad 3.



Das Lagrangepolynom und die Funktion x^2 (gestrichelt)

2.) Für $f(x) = \cos x$ ergibt sich

$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x + \cot x\ .$$

Beim Newtonverfahren wird also die Funktion $g(x)$ iteriert. Beginnen wir mit dem Startwert $x_0 = 2$, so erhalten wir aus

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

die Folge (x_n) mit

n	x_n
0	2
1	1.5423424456397141
2	1.5708040082580965
3	1.5707963267948966
4	1.5707963267948966

und somit bereits bei der 2. Iteration auf 6 (und mehr) Stellen genau

$$\pi = 2 \cdot 1.5707963267948966 = 3.141592\,.$$

3.) Gegeben sind $N = 7$ Datenpaare. Die Daten liefern die Mittelwerte

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k = \frac{38}{7}$$

und

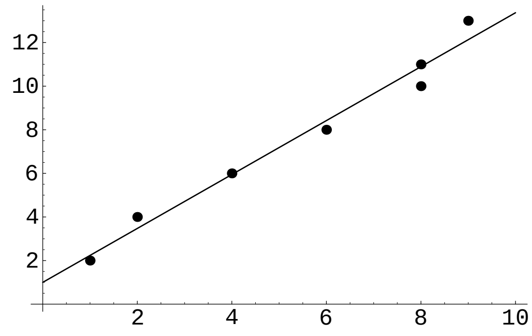
$$\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k = \frac{54}{7}\ .$$

Die Steigung m der Regressionsgeraden $y = m\,x + n$ ist also gleich

$$m = \frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k y_k - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k^2 - \overline{x}^2} = \frac{47}{38} = 1.23684$$

und der Achsenabschnitt n ergibt sich zu

$$n = \overline{y} - m\cdot\overline{x} = 1\ .$$



Die Regressionsgerade
$f(x) = 1.23684\,x + 1.0$

4.) Das Euler-Cauchy-Verfahren liefert mit $h = 0.1$ und $n = 10$ die Iteration

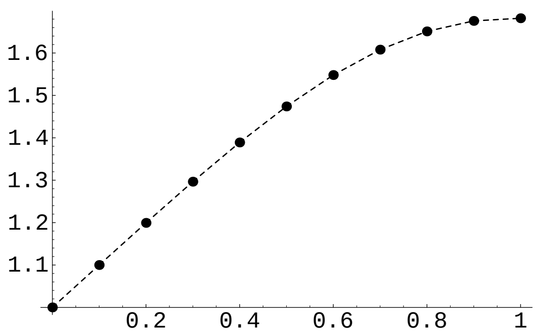
$$\begin{aligned} x_j &= j\,h = 0.1\,j \\ y(x_j) = y_j &= y_{j-1} + h\,g(x_{j-1}, y_{j-1}) = y_{j-1} + 0.1\,\cos(x_{j-1}\,y_{j-1}) \end{aligned}$$

$(j = 1, \ldots, n)$ mit dem Anfangswert

$$y_0 = y(0) = 1\ .$$

Eine Rechnung liefert die Datentabelle

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_j	1.1	1.199	1.2965	1.3891	1.4740	1.5481	1.6079	1.6510	1.6758	1.6820



Eine Zeichnung der Lösung des
Euler-Cauchy-Verfahrens