KLAUSUR

Mathematik IV (E)

15.9.2011

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Für jede Aufgabe gibt es 6 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei das Polynom

$$p_3(x) = 2\,x^3 + 6\,x^2 - 5\,x + 1\,.$$

Berechnen Sie die Ableitungen $p_3'(2), p_3''(2), p_3'''(2)$ mit dem vollständigen Horner-Schema. Wie lautet das Polynom $p_2(x)$, welches die folgende Gleichung erfüllt

$$p_3(x) - p_3(2) = (x-2)\,p_2(x)?$$

2. Gegeben seien die Wertepaare: $(x_0, y_0) = (-1, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, -3)$, $(x_2, y_2) = (2, 9)$.
(a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom vom Grad 2.
(b) Geben Sie alle Polynome $\psi(x)$ höchstens 4. Grades an, welche die Summe der Fehlerquadrate $(y_0 - \psi(x_0))^2 + (y_1 - \psi(x_1))^2 + (y_2 - \psi(x_2))^2$ minimieren.

3. Gegeben seien die Stellen:

$$x_0 = a\,, x_1 = \frac{a+b}{2}\,, x_2 = b\,, y_0 = c\,, y_1 = \frac{c+d}{2}\,, y_2 = d\,,$$

und eine stetige Funktion $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$.
Sei

$$P_{2,2}(x,y) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} f(x_i, y_j)\, L_{2,i}(x)\, L_{2,j}(y)$$

mit den Lagrange-Basispolynomen:

$$L_{2,i}(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{2} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}\,, i = 0,1,2\,, \quad L_{2,j}(y) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{2} \frac{y - y_k}{y_j - y_k}\,, j = 0,1,2\,.$$

(a) Berechnen Sie die Werte $P_{2,2}(x_l, y_m)\,, l, m = 0, 1, 2.$
(b) Geben Sie die Gewichte $\beta_{0,0}\,, \beta_{0,1}\,, \beta_{0,2}$ in der folgenden Formel an:

$$\int_c^d \left(\int_a^b P_{2,2}(x,y)\,dx \right) dy = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \beta_{i,j}\, f(x_i, y_j)\,.$$

4. Gegeben ist die Funktion

$$\phi(x) = \frac{3}{4}\,x + \frac{1}{2\,x^3}\,, \quad x > 0\,.$$

(a) Zeigen Sie: $\phi(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2}$. Geben Sie eine Konstante $0 < L < 1$ an mit

$$|\phi(x) - \phi(\tilde{x})| \leq L\,|x - \tilde{x}|\,, \quad x, \tilde{x} \geq \sqrt[4]{2}\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion ϕ jedes Intervall $[\sqrt[4]{2}, b]$, $b > \sqrt[4]{2}$, in sich abbildet.
(c) Sei $x^{(0)} = 2$ und $x^{(\nu+1)} = \phi(x^{(\nu)})$. Wie groß muss man ν mindestens wählen, damit die folgende Abschätzung gilt

$$|x^{(\nu)} - \sqrt[4]{2}| \leq 10^{-5}?$$

Lösungen:

1.) Das vollständige Horner-Schema lautet für $x_0 = 2$:

p_3	2	6	-5	1
$x_0 = 2$	0	4	420	30
p_2	2	10	15	$31 = p_3(2)$
$x_0 = 2$	0	4	28	
p_1	2	14	$43 = \frac{p_3'(2)}{1!}$	
$x_0 = 2$	0	4		
p_0	2	$18 = \frac{p_3''(2)}{2!}$		
$x_0 = 2$	0			
	$2 = \frac{p_3'''(2)}{3!}$			

$$p_3(2) = 31\,, p_3'(2) = 43\,, p_3''(2) = 36\,, p_3'''(2) = 12\,,$$
$$p_3(x) - p_3(2) = (x-2)\,(2\,x^2 + 10\,x + 15)\,.$$

2.) (a) Interpolationspolynom in Lagrange-Form:

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x - x_1)}{x_0 - x_1}\,\frac{(x - x_2)}{x_0 - x_2} = \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{3}\,,$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0}\,\frac{(x - x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x + 1\,,$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x - x_0)}{x_2 - x_0}\,\frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{3}\,x^2 - \frac{1}{3}\,,$$

$$L_2(x) = L_{2,0}(x) + 3\,L_{2,1}(x) + 9\,L_{2,2}(x) = \frac{14}{3}\,x^2 - 2\,x - \frac{17}{3}\,.$$

(b) Das Minimum ist in diesem Fall Null. Es wird erreicht von den Polynomen:

$$\psi(x) = L_2(x) + (x+1)\,(x-1)\,(x-2)\,(a\,x + b)\,.$$

(Interpolatiospolynom plus beliebiges Polynom vierten Grades, das an den Sttz-stellen jeweils verschwindet).
Anderer Weg:

$$a_{j,k} = \sum_{i=0}^{3} x_i^{j+k}\,, \quad b_j = \sum_{i=0}^{3} y_i\,x_i^j\,, j,k = 0,1,2,3,4\,.$$

Gleichungssystem:

$$A \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

lösen.

3) (a)

$$P_{2,2}(x_l, y_m) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} f(x_i, y_j)\, L_{2,i}(x_l)\, L_{2,j}(y_m) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} f(x_i, y_j)\, \delta_{i,l}\, \delta_{j,m} = f(x_l, y_m)\,.$$

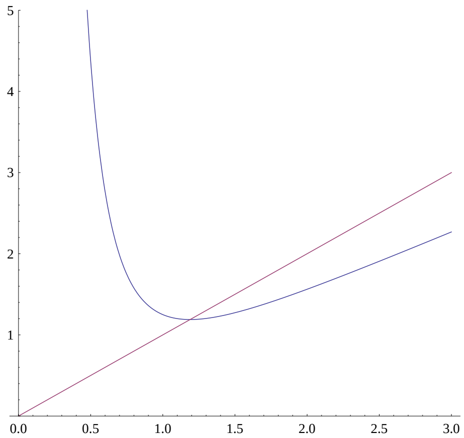
(b)

$$\beta_{i,j} = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b L_{2,i}(x)\, L_{2,j}(y) dx \right) dy = \int\limits_a^b L_{2,i}(x)\, dx \int\limits_c^d L_{2,j}(y)\, dy\,.$$

Wie bei Simpson-Formel:

$$\beta_{0,0} = \frac{b-a}{6} \frac{d-c}{6}\,, \quad \beta_{0,1} = \frac{b-a}{6} \frac{2\,(d-c)}{3}\,, \quad \beta_{0,2} = \frac{b-a}{6} \frac{d-c}{6}\,.$$

4)



Die Funktion $\phi(x)$ und die Winkelhalbierende

$$\phi'(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \frac{1}{x^4}$$

$$\phi'(x) = 0\,, \quad x = \sqrt[4]{2}$$
$$\phi'(x) < 0\,, \quad x < \sqrt[4]{2}$$
$$\phi'(x) > 0\,, \quad x > \sqrt[4]{2}$$

Minimum bei $x = \sqrt[4]{2}$.
(a) $\phi(x) = x$ für $x = \sqrt[4]{2}$:

$$\phi(x) = x\,\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^4}\right)$$

$$\phi(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2}\,\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \sqrt[4]{2}\,.$$

$$|\phi(x) - \phi(\tilde{x})| \le \frac{3}{4}\,|x - \tilde{x}|\,, \quad x, \tilde{x} > \sqrt[4]{2}\,.$$

(b) $\phi([\sqrt[4]{2}, b]) \subset [\sqrt[4]{2}, b]$. Denn:

$$0 \le \phi'(x) < \frac{3}{4}\,, \quad x \ge \sqrt[4]{2}\,,$$

ϕ streng monoton wachsend für $x \ge \sqrt[4]{2}$ und

$$\phi(x) - \phi(\sqrt[4]{2}) < \frac{3}{4}\,x - \frac{3}{4}\,\sqrt[4]{2}$$

$$\phi(x) < \frac{3}{4}\,x + \frac{1}{4}\,\sqrt[4]{2} < x$$

(c)

$$|\phi(x) - \sqrt[4]{2}| \le \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\nu}}{1 - \frac{3}{4}}\,|x^{(1)} - 2|$$

$$|\phi(x) - \sqrt[4]{2}| \le \left(\frac{3}{4}\right)^{\nu}\,4\,\frac{7}{16}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\nu}\,\frac{7}{4} \le 10^{-5}$$