KLAUSUR

Mathe I (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

01.03.2011

(W. Strampp / W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 22 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = -1+i$ und $z_2 = \frac{\sqrt{15}}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2}$.
   (i) Schreiben Sie z_1 und z_2 in Polardarstellung (Rechnen Sie in Grad. Stellen Sie dazu Ihren Taschenrechner auf DEG ein, **nicht** RAD).
   (ii) Bestimmen Sie $w = z_1^8 z_2^6$ und schreiben Sie das Ergebnis in der Form $w = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$.
   (iii) Wie lauten die Lösungen der Gleichung $z^2 - 6iz = z_1 + 9$?

   (b) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erfüllen folgende Gleichungen,

   (1) $$(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = -15$$

   (2) $$||\vec{a}||\ ||\vec{b}|| - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 2\sqrt{3}$$

   wobei 1 die Länge des Vektors $\vec{a}$ sei (d. h. $||\vec{a}|| = 1$).
   Berechnen Sie die Länge von $\vec{b}$, das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sowie den von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel α (wiederum in Grad).

2. (a) Die drei Punkte $A = (2, a, 24)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (-1, 1, -2)$ spannen im $\mathbb{R}^3$ ein Dreieck auf.
   Wie muss man a wählen, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ABC genauso groß wird, wie der Flächeninhalt des Quadrats über der Seite BC?

   (b) Gegeben seien die Ebenen

   $E_1 :\ 3x-y-z = 0,\ E_2 :\ -x+y-z = -1$ und $E_3 :\ -6x+2y+2z = 0.$

   Bestimmen Sie die Schnittmenge der drei Ebenen und geben Sie eine Parameterdarstellung davon an.

Bitte wenden!

3. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2\,n}{n+2}\right)^3$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(n+k)$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$.

4. Gegeben sei die Funktion

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{1-e^{x}}\,,\quad x\le 0\,.$$

(a) Geben Sie folgende Grenzwerte an:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\,,\quad \lim_{x\to -\infty} f(x)\,.$$

Geben Sie Monotonie-Intervalle von f an und skizzieren Sie f.
(b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von f in jedem Monotonie-Intervall.

5. Gegeben sei die Funktion

$$f(x)=\frac{x^5}{1+x^4}\,.$$

(a) Wie lautet das Taylorpolynom der Funktion f vom Grad 15 um den Entwicklungspunkt $x_0=0$.
(b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ mit der Substitution $x=\sqrt{t}$.

Lösungen 1a (i)

$$z_1 = -1+i\ ; \quad |z_1| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi_1 = 2\arctan\left(\frac{1}{-1+\sqrt{2}}\right) = 135^\circ$$

$$\Longrightarrow z_1 = \sqrt{2}e^{135^\circ i}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{15}}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2}\ ; \quad |z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{5},$$

$$\varphi_2 = 2\arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}+\sqrt{5}}\right) = -30^\circ \Longrightarrow z_2 = \sqrt{5}e^{-30^\circ i}$$

1a (ii)

$$w = z_1^8 z_2^6 = \left(\sqrt{2}e^{135^\circ i}\right)^8 \left(\sqrt{5}e^{-30^\circ i}\right)^6 = (\sqrt{2})^8 e^{135^\circ i\cdot 8}(\sqrt{5})^6 e^{-30^\circ i\cdot 6} = 16\cdot 1\cdot 125\cdot(-1) = -2000$$

1a (iii)

Lösungen der Gleichung $z^2 - 6iz = z_1 + 9$

$$z^2-6iz = z_1+9 \Longleftrightarrow (z-3i)^2-(-3i)^2 = z_1+9 \Longleftrightarrow (z-3i)^2+9 = z_1+9 \Longleftrightarrow (z-3i)^2 = z_1$$

$$\Longleftrightarrow (z-3i)^2 = \sqrt{2}e^{135^\circ i} \Longleftrightarrow z-3i = \pm\left(\sqrt{2}e^{135^\circ i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow z = 3i + 2^{\frac{1}{4}}e^{67.5^\circ i} \quad \text{oder} \quad z = 3i - 2^{\frac{1}{4}}e^{67.5^\circ i}$$

1b

$$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b}) = -15 \Longleftrightarrow ||\vec{a}||^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{a}-4||\vec{b}||^2 = -15 \Longleftrightarrow ||\vec{a}||^2-4||\vec{b}||^2 = -15$$

$$\Longleftrightarrow 1^2 - 4||\vec{b}||^2 = -15 \Longleftrightarrow -4||\vec{b}||^2 = -16 \Longleftrightarrow ||\vec{b}|| = 2$$

$$||\vec{a}||\ ||\vec{b}|| - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 2+2\sqrt{3} \Longleftrightarrow 1\cdot 2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 2+2\sqrt{3} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = -\sqrt{3}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||\cdot||\vec{b}||} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 150^\circ$$

2a

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC bzw. des Quadrats über der Seite BC ist durch die Formel $F_{ABC} = \frac{1}{2}||\vec{AB}\times\vec{AC}||$ bzw. $F_{BC} = ||\vec{BC}||^2$ gegeben.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-a \\ -22 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1-a \\ -26 \end{pmatrix},$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$F_{ABC} = \frac{1}{2}||\vec{AB} \times \vec{AC}|| = \frac{1}{2}\left|\left| \begin{pmatrix} -26(1-a) + 22(1-a) \\ (-22)(-3) - 26 \\ -1(1-a) + 3(1-a) \end{pmatrix} \right|\right| = \frac{1}{2}\left|\left| \begin{pmatrix} -4(1-a) \\ 40 \\ 2(1-a) \end{pmatrix} \right|\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-4(1-a))^2 + 40^2 + (2(1-a))^2} = \sqrt{5(1-a)^2 + 400}.$$

$$F_{BC} = ||\vec{BC}||^2 = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-4)^2} = 20.$$

$$F_{ABC} = F_{BC} \Longleftrightarrow \sqrt{5(1-a)^2 + 400} = 20 \Longleftrightarrow 5(1-a)^2 + 400 = 400$$

$$\Longleftrightarrow 5(1-a)^2 = 0 \Longrightarrow a = 1.$$

2b

Die Schnittmenge der Ebenen

$$E_1 : 3x - y - z = 0, \ E_2 : -x + y - z = -1 \text{ und } E_3 : -6x + 2y + 2z = 0.$$

ist durch das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - y - z &= 0 \\ -x + y - z &= -1 \\ -6x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

gegeben. Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = (1) + 3(2) \\ (3') = 2(1) + (3) \end{array}$$

Man stellt fest, dass das GS unterbestimmt ist. Man setze $z = \lambda$.

$(2') \rightsquigarrow 2y - 4\lambda = -3 \Longrightarrow y = 2\lambda - \dfrac{3}{2} \quad (1') \rightsquigarrow -3x - (2\lambda - \dfrac{3}{2}) - \lambda = 0 \Longrightarrow x = \lambda - \dfrac{1}{2}$.

Die gesuchte Schnittmenge ist die Gerade mit der folgenden Parameterdarstellung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{2} \\ 2\lambda - \frac{3}{2} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

3a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\,n}{n+2} \right)^3 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1+\frac{2}{n}} \right)^3 = 2^3 = 8\,.$$

3b)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (n+k) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} n + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \right) \\ &= \frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2} \frac{n\,(n+1)}{2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \right) = \frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

3c)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\quad - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\,. \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{3}{2}\,.$$

4a)

$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{x}}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty\,,$$

(Zähler gegen 1, Nenner gegen 0).

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty\,,$$

(Zähler gegen ∞, Nenner gegen 1).

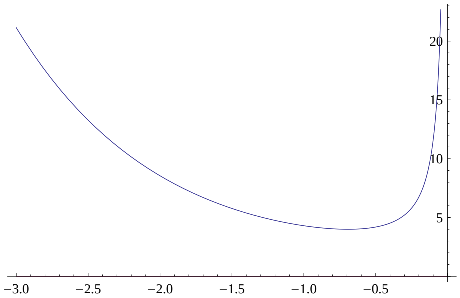
$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{1-e^x} + \frac{1}{(1-e^x)^2} = \frac{2-e^{-x}}{(1-e^x)^2}\,.$$

$$f'(x) = 0 \iff 2-e^{-x} = 0 \iff x = -\ln(2)$$

$$f'(x) < 0 \iff 2-e^{-x} < 0 \iff x < -\ln(2)$$

$$f'(x) < 0 \iff 2-e^{-x} > 0 \iff x > -\ln(2)$$

Tiefpunkt: $(-\ln(2), 4)$



4b)

$$\frac{e^{-x}}{1-e^x} = y \iff y\,e^x + e^{-x} - y = 0$$

Setze $z = e^x$:

$$z^2 - z + \frac{1}{y} = 0$$

$$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{y}}$$

Umkehrfunktion:

$$x = \ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{y}}\right)\,, \quad y > 4, x > -\ln(2)\,,$$

$$x = \ln\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{y}}\right)\,, \quad y > 4, x < -\ln(2)\,,$$

5a)
Geometrische Reihe:

$$f(x) = \frac{x^5}{1+x^4} = x^5 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \, (x^4)^\nu \,, \quad |x| < 1 \,.$$

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \, x^{4\,\nu+5} = x^5 - x^9 + x^{13} - x^{17} + x^{21} \cdots \,.$$

$$T_{15}(f, x, 0) = x^5 - x^9 + x^{13} \,.$$

5b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5}{1+x^4}\, dx &= \left(\int \frac{t^2 \sqrt{t}}{1+t^2} \, \frac{1}{2\sqrt{t}} \, dt \right)_{t=x^2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \right)_{t=x^2} \\
&= \frac{1}{2} \, (t - \arctan(t) + c)_{t=x^2} \\
&= \frac{1}{2} \, \big(x^2 - \arctan(x^2) + c \big)
\end{aligned}$$