

KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker/Mechatroniker

26.2.2010

W. Seiler , W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.-Nr.:
-------	----------	------------

Für jede Aufgabe gibt es 6 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)
----	----	----	----	----

Punkte:	Note:
---------	-------

**Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.**

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y' = -\cos(x) + (\cos(x) + 1)e^x, \quad y(0) = -1.$$

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' - 3y' = 3x^2.$$

Hinweis: verwenden Sie zur Bestimmung einer speziellen Lösung den Ansatz $y_{\text{spez}}(x) = p(x)$ mit einem Polynom $p(x)$ vom Grad 3.

3. Gegeben ist das Differentialgleichungssystem:

$$Y' = AY, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem. Wie lautet die Matrixexponentialfunktion e^{Ax} .

4. Die Kurve Γ werde gegeben durch $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$. Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_{\Gamma} z dz$ und $\int_{\Gamma} \operatorname{Im}(z) dz$.
5. Was für Singularitäten besitzt die Funktion

$$f(z) = \frac{(1+i)z}{z^3 - 2iz}?$$

Berechnen Sie an allen Polstellen das Residuum von f . Hinweis: benutzen Sie zur Vereinfachung, daß $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$.

Lösungen

1. y tritt auf der rechten Seite nicht auf \rightsquigarrow direkte Integration

$$y(x) - y(0) = \int_0^x \left(-\cos(\xi) + (\cos(\xi) + 1)e^\xi \right) d\xi$$
$$\Rightarrow y(x) = -1 + [-\sin(\xi)]_0^x + [e^\xi]_0^x + \int_0^x \cos(\xi)e^\xi d\xi$$

Nebenrechnung:

$$\int_0^x \cos(\xi)e^\xi d\xi = [\cos(\xi)e^\xi]_0^x + \int_0^x \sin(\xi)e^\xi d\xi$$
$$= \cos(x)e^x - 1 + [\sin(\xi)e^\xi]_0^x - \int_0^x \cos(\xi)e^\xi d\xi$$

(zweimal partiell Integrieren). Also gilt

$$\int_0^x \cos(\xi)e^\xi d\xi = \frac{1}{2}(\cos(x)e^x + \sin(x)e^x - 1)$$

Endergebnis:

$$y(x) = -\frac{5}{2} - \sin(x) + \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x) + 2)e^x$$

2. inhomogene lineare Differentialgleichung \rightsquigarrow betrachte zunächst zugehörige homogene Gleichung mit charakteristisches Polynom:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

\Rightarrow Fundamentalsystem der homogenen Gleichung: $1, e^{-x}, e^{3x}$

Ansatz für spezielle Lösung: $y_{\text{spez}}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

also: $y'_{\text{spez}}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2, y''_{\text{spez}}(x) = 2a_2 + 6a_3x, y'''_{\text{spez}}(x) = 6a_3$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$(6a_3 - 4a_2 - 3a_1) - 6(2a_3 + a_2)x - 9a_3x^2 = 3x^2$$

und ein Koeffizientenvergleich ergibt dann

$$a_3 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_1 = -\frac{14}{9}, \quad a_0 \text{ beliebig}$$

Also lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = -\frac{14}{9}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{3x}$$

mit Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3 .

3. Berechne Eigenwerte und -vektoren von A :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

Zwei Eigenwerte: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$

Zugehörige Eigenvektoren:

$$A - E = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ Basis von } E_1$$
$$A - 5E = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Basis von } E_5$$

\Rightarrow Fundamentalsystem: $Y_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^x, Y_2(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}$

Bestimmung der Matrixexponentialfunktion:

$$S = (\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$e^{Ax} = S \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{5x} \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^x + 2e^{5x} & -4e^x + 4e^{5x} \\ -e^x + e^{5x} & 2e^x + 2e^{5x} \end{pmatrix}$$

4. Kurve Γ ist ein Kreis um den Ursprung mit Radius 2 \rightsquigarrow

Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto 2e^{it} = 2 \cos(t) + 2i \sin(t)$

$\Rightarrow \quad \gamma'(t) = 2ie^{it} = -2 \sin(t) + 2i \cos(t)$

- $f(z) = z$ ist eine holomorphe Funktion, Γ eine geschlossene Jordan-Kurve \Rightarrow (Cauchyscher Integralsatz) $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$
(Alternativ: $F(z) = z^2/2$ ist eine Stammfunktion von $f(z)$)
- $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ ist nicht holomorph, daher explizite Integration nötig.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \sin(t) (-2 \sin(t) + 2i \cos(t)) dt \\ &= -4 \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt + 4i \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt \end{aligned}$$

Nebenrechnungen:

$$\int \sin(t) \cos(t) dt = \int s ds = \frac{1}{2} s^2 = \frac{1}{2} \sin^2(t)$$

$$\text{(Substitution von } s = \sin(t)) \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = [-\sin(t) \cos(t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2(t)) dt$$

(partielle Integration, Einsetzen von $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$). Also gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi$$

Einsetzen der Ergebnisse der Nebenrechnungen ergibt dann:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -4\pi$$

5.

$$f(z) = \frac{(1+i)z}{z^3 - 2iz} = \frac{(1+i)z}{z(z^2 - 2i)} = \frac{(1+i)z}{z(z + \sqrt{2i})(z - \sqrt{2i})}$$

Nebenrechnung: $\sqrt{2i} = \sqrt{2}\sqrt{i} = 1 + i$

Also besitzt $f(z)$ drei Singularitäten:

- $z = 0$ hebbare Singularität (da $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{1+i}{-2i}$)
- $z = \pm(1+i)$ Pole erster Ordnung

Berechnung der Residuen an den Polen: Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{1+i}{(z+(1+i))(z-(1+i))} = \frac{A}{z+(1+i)} + \frac{B}{z-(1+i)}$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$Az - A(1+i) + Bz + B(1+i) = 1+i$$

Koeffizientenvergleich führt zu dem LGS

$$A + B = 0 \quad -A + B = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$$

Dies ergibt

$$f(z) = \frac{-1/2}{z+(1+i)} + \frac{1/2}{z-(1+i)}$$

und damit

$$\operatorname{Res}(f(z), (1+i)) = \frac{1}{2} \quad \operatorname{Res}(f(z), -(1+i)) = -\frac{1}{2}$$