KLAUSUR

Mathe II für Informatiker

01.09.2011

(Wolfram Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrifft:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} .$$

   Bestimmen Sie

   (a) das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte von A.

   (b) die Eigenvektoren von A.

   (c) eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix D ist. Geben Sie auch D an.

2. (a) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten x, y und z

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -\alpha \\ 3 & -2 & 2 \\ -\alpha & 2 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

   (α und β seien beliebige reelle Zahlen).
   Unter welcher Bedingung ist das System

   (i) nicht lösbar?

   (ii) eindeutig lösbar?

   (iii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?

   (b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ wird durch die folgende Matrix A von f bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ (d. h. die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie eine Basis des Kerns sowie eine Basis des Bildes von f, und bestätigen Sie die Dimensionsformel.

Lösungen
1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

1a Charakteristisches Polynom von A

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -6 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ 3 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 \ .$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\mathcal{X}_A(\lambda)$. D.h. $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$.

1b Eigenvektoren von A.
Die Eigenvektoren von A sind die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme $(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0}$ für $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$.
Für $\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow (A - E)\vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus hat man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -6 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = (1) + (2) \\ (3') = (1) - (3) \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist unterbestimmt. Man setze $z = \mu$

$$(2') \rightsquigarrow -3y - 3\mu = 0 \Longrightarrow y = -\mu \ .(1') \rightsquigarrow 3x - 6\mu = 0 \Longrightarrow x = 2\mu \ .$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \\ -\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für den Eigenwert $\lambda = -1$ der Eigenvektor $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Genauso erhält man für den Eigenwert $\lambda = -2$ die linear unabhängigen Eigenvektoren

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1c

Eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist, wird spaltenweise aus den Eigenvektoren gebildet. Die entsprechende Diagonalmatrix D enthält die Eigenwerte in der Diagonalen.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

2a

Gleichungssystem für die Unbekannten x, y und z

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -\alpha \\ 3 & -2 & 2 \\ -\alpha & 2 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

(α und β seien beliebige reelle Zahlen).

Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man Mit dem Gauß-Algorithmus hat man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ -\alpha & 2 & -\alpha & \beta \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 3+2\alpha & -5\alpha & 0 \\ 0 & 3 & -2\alpha & \beta \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = 3(1) - \alpha(2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 3+2\alpha & -5\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(9-4\alpha) & \beta(3+2\alpha) \end{array}\right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -3(2') + (3+2\alpha)(3') \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist

(i) nicht lösbar, wenn
$\alpha(9 - 4\alpha) = 0$ und $\beta(3 + 2\alpha) \neq 0$, d.h. wenn ($\alpha = 0$ oder $\alpha = \frac{9}{4}$) und $\beta \neq 0$.

(ii) eindeutig lösbar, wenn
$\alpha(9 - 4\alpha) \neq 0$, d.h. wenn $\alpha \neq 0$ und $\alpha \neq \frac{9}{4}$.

(iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn
$\alpha(9-4\alpha)=0$ und $\beta(3+2\alpha)=0$, d.h. wenn ($\alpha=0$ und $\beta=0$) oder ($\alpha=\frac{9}{4}$ und $\beta=0$).

2b

Die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ wird durch die folgende Matrix A (mit der Eigenschaft $f(\vec{x})=A\cdot\vec{x}$ für alle $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$) gegeben:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung einer Basis des Kerns von f.

$\vec{u}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\in \text{Kern}(f) \Longleftrightarrow A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1') \\ (2')=-2(1)+(2) \\ (3')=2(1)+(3) \end{array}$$

Man setze $x_4=\lambda$ und $x_3=\mu$.

$$(2') \rightsquigarrow 7x_2+6\mu+3\lambda=0 \Longrightarrow x_2=-\frac{6}{7}\mu-\frac{3}{7}\lambda$$

$$(1') \rightsquigarrow x_1=\frac{9}{7}\mu-\frac{13}{7}\lambda$$

$$\vec{u}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{7}\mu-\frac{13}{7} \\ -\frac{6}{7}\mu-\frac{3}{7}\lambda \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass eine Basis des Kerns von f durch

$$B_1=\left\{\vec{a_1}=\begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a_2}=\begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ gegeben ist,} \quad \dim(\text{Kern}(f))=2\ .$$

Bestimmung einer Basis des Bildes von f.
Die linear unabhängigen Spalten von A bilden eine Basis des Bildes von f. Mit Spaltenumformungen erhält man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass eine Basis des Bildes von f durch

$$B_2 = \left\{ \vec{b1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ gegeben ist, } \quad \text{dim (Bild } (f)) = 2 \text{ .}$$

Bestätigung der Dimensionsformel.

$$\begin{aligned} \textbf{dim}(\mathbb{R}^4) &= \textbf{dim(Kern } (f)) + \textbf{dim(Bild } (f)) \Longleftrightarrow \\ 4 &= 2 + 2 \end{aligned}$$