KLAUSUR

Mathe II (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

01.09.2011

(Wolfram Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 22 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie

   (a) das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte von A.

   (b) die Eigenvektoren von A.

   (c) eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix D ist. Geben Sie auch D an.

2. (a) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten x, y und z

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -\alpha \\ 3 & -2 & 2 \\ -\alpha & 2 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

   (α und β seien beliebige reelle Zahlen).
   Unter welcher Bedingung ist das System

   (i) nicht lösbar?

   (ii) eindeutig lösbar?

   (iii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?

   (b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ wird durch die folgende Matrix A von f bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ (d. h. die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie eine Basis des Kerns sowie eine Basis des Bildes von f, und bestätigen Sie die Dimensionsformel.

   Bitte wenden!

3. (a) Berechnen Sie das Volumen des folgenden Teilgebiets $D \subset \mathbb{R}^3$

$$D := \{(x, y, z) \mid -yz \leq x \leq y, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2y + 1\} \ .$$

   (b) Sei $f(x, y, z) = 2x^3 - 5y + 2z^2$ und $\vec{e}$ der zu $(0, -2, 1)$ gehörige Einheitsvektor.
   Berechnen Sie die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x, y, z) \ .$$

   sowie die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion $f(x, y, z)$ im Punkt $P = (3, -1, 2)$.

4. Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \ .$$

   Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^4 + y^4 - 2 = 0$$

   sowie die dortigen Funktionswerte, anschließend leiten Sie hieraus die Maximalstellen bzw. Minimalstellen her.

5. (a) Gegeben seien die Funktion

$$f(x, y) = x$$

   und die Punkte $A = (-2, 0)$, $B = (1, 2)$ und $C = (2, 0)$.
   Integrieren Sie die Funktion f über das Innere des Dreiecks ABC.

   (b) Gegeben sei das Gebiet des $\mathbb{R}^2$, das im ersten Quadranten liegt

$$D := \left\{ (x, y) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 5 \ , x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

   Benutzen Sie Ellipsenkoordinaten, um das folgende Integral

$$\int\limits_D y\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\, d(x, y)$$

   zu berechnen.
   Hinweis: Parametrisierung der Ellipsenkoordinaten: $x = a\, r\cos(\theta), y = b\, r\sin(\theta)$, wobei die Determinante der Jacobi-Matrix $|J| = a\, b\, r$ ist.

Lösungen

1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

1a Charakteristisches Polynom von A

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -6 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ 3 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 \ .$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\mathcal{X}_A(\lambda)$. D.h. $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$.

1b Eigenvektoren von A.
Die Eigenvektoren von A sind die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme $(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0}$ für $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$.
Für $\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow (A - E)\vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus hat man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -6 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = (1) + (2) \\ (3') = (1) - (3) \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist unterbestimmt. Man setze $z = \mu$

$$(2') \rightsquigarrow -3y - 3\mu = 0 \Longrightarrow y = -\mu\ .(1') \rightsquigarrow 3x - 6\mu = 0 \Longrightarrow x = 2\mu\ .$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \\ -\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für den Eigenwert $\lambda = -1$ der Eigenvektor $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Genauso erhält man für den Eigenwert $\lambda = -2$ die linear unabhängigen Eigenvektoren

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1c

Eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist, wird spaltenweise aus den Eigenvektoren gebildet. Die entsprechende Diagonalmatrix D enthält die Eigenwerte in der Diagonalen.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2a

Gleichungssystem für die Unbekannten x, y und z

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -\alpha \\ 3 & -2 & 2 \\ -\alpha & 2 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

(α und β seien beliebige reelle Zahlen).
Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man Mit dem Gauß-Algorithmus hat man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ -\alpha & 2 & -\alpha & \beta \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 3+2\alpha & -5\alpha & 0 \\ 0 & 3 & -2\alpha & \beta \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = 3(1) - \alpha(2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 3+2\alpha & -5\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(9-4\alpha) & \beta(3+2\alpha) \end{array}\right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -3(2') + (3+2\alpha)(3') \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist

(i) nicht lösbar, wenn
$\alpha(9-4\alpha) = 0$ und $\beta(3+2\alpha) \neq 0$, d.h. wenn ($\alpha = 0$ oder $\alpha = \frac{9}{4}$) und $\beta \neq 0$.

(ii) eindeutig lösbar, wenn
$\alpha(9-4\alpha) \neq 0$, d.h. wenn $\alpha \neq 0$ und $\alpha \neq \frac{9}{4}$.

(iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn
$\alpha(9-4\alpha)=0$ und $\beta(3+2\alpha)=0$, d.h. wenn ($\alpha=0$ und $\beta=0$) oder ($\alpha=\frac{9}{4}$ und $\beta=0$).

2b
Die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ wird durch die folgende Matrix A (mit der Eigenschaft $f(\vec{x})=A\cdot\vec{x}$ für alle $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$) gegeben:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ -2 & 4 & -6 & 2\end{pmatrix}$$

Bestimmung einer Basis des Kerns von f.

$\vec{u}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in \text{Kern}(f)\Longleftrightarrow A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 4 & -6 & 2 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 7 & 6 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\begin{array}{c}(1')\\(2')=-2(1)+(2)\\(3')=2(1)+(3)\end{array}$$

Man setze $x_4=\lambda$ und $x_3=\mu$.

$$(2')\rightsquigarrow 7x_2+6\mu+3\lambda=0\Longrightarrow x_2=-\frac{6}{7}\mu-\frac{3}{7}\lambda$$

$$(1')\rightsquigarrow x_1=\frac{9}{7}\mu-\frac{13}{7}\lambda$$

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{7}\mu-\frac{13}{7}\\-\frac{6}{7}\mu-\frac{3}{7}\lambda\\\mu\\\lambda\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}\frac{9}{7}\\-\frac{6}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-\frac{13}{7}\\-\frac{3}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass eine Basis des Kerns von f durch

$$B_1=\left\{\vec{a_1}=\begin{pmatrix}\frac{9}{7}\\-\frac{6}{7}\\1\\0\end{pmatrix},\vec{a_2}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{7}\\-\frac{3}{7}\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$ gegeben ist, $\quad\dim(\text{Kern}(f))=2$.

Bestimmung einer Basis des Bildes von f.
Die linear unabhängigen Spalten von A bilden eine Basis des Bildes von f. Mit Spaltenumformungen erhält man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass eine Basis des Bildes von f durch

$$B_2 = \left\{ \vec{b1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ gegeben ist, } \quad \dim(\text{Bild}(f)) = 2 \; .$$

Bestätigung der Dimensionsformel.

$$\begin{aligned} \textbf{dim}(\mathbb{R}^4) &= \textbf{dim(Kern }(f)) + \textbf{dim(Bild }(f)) \Longleftrightarrow \\ 4 &= 2 + 2 \end{aligned}$$

3.

(a) Sei $f(x, y, z) = 2x^3 - 5y + 2z^2$ und $\vec{e}$ der zu $(0, -2, 1)$ gehörige Einheitsvektor.
Man berechne die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x, y, z) = \text{grad}(f) \cdot \vec{e}^T \quad \textbf{mit} \quad \vec{e} = \frac{(0, -2, 1)}{||(0, -2, 1)||} = \frac{\sqrt{5}}{5}(0, -2, 1) \; .$$

und $\quad \operatorname{grad}(f) = (6x^2, -5, 4z) \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(6x^2,-5,4z)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) = \frac{\sqrt{5}}{5}(10+4z)\ .$$

Man berechne die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion $f(x,y,z)$ **im Punkt** $P = (3,-1,2)$**.**
Sei $\vec{e_p}$ **dieser Anstieg.**

$$\vec{e_p} = \frac{\operatorname{grad} f(p)}{||\operatorname{grad} f(p)||} = \frac{(6\cdot 3^2, -5, 4\cdot 2)}{||(6\cdot 3^2,-5,4\cdot 2)||} = \frac{\sqrt{3005}}{3005}(54,-5,8)\ .$$

(b) Berechnen Sie das Volumen des folgenden Teilgebiets $D \subset \mathbb{R}^3$

$$D := \{(x,y,z)\,|\,-z \le x \le 1, 0 \le z \le 2y+1, 0 \le y \le 1\}\ .$$

Sei v **dieses Volumen.**

$$v = \int_0^1 \left(\int_0^{2y+1} \left(\int_{-z}^1 1dx \right) dz \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2y+1} (1+z)\,dz \right) dy =$$

$$\int_0^1 \left(2y+1-\frac{1}{2}(2y+1)^2 \right) dy = \int_0^1 \left(2y^2+4y+\frac{3}{2} \right) dy = \frac{25}{6}VE\ .$$

4.
Man bestimme die Extremstellen der Funktion $f(x,y) = x^2+y^2$ **unter der Nebenbedingung**

$$g(x,y) = x^4+y^4-2 = 0\ .$$

Dies sind die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{matrix} x^4+y^4-2=0 \\ \operatorname{grad}(f(x,y)+\lambda\operatorname{grad}(g(x,y)=\vec{0} \end{matrix} \iff \begin{matrix} x^4+y^4-2=0 \\ (2x,2y)+\lambda(4x^3,4y^3)=(0,0) \end{matrix}$$

$$\iff \begin{matrix} x^4+y^4-2=0 & (1) \\ 2x+\lambda 4x^3=0 & (2) \\ 2y+\lambda 4y^3 = 0 & (3) \end{matrix} \quad (2)\cdot(y^3) \quad \textbf{und} \quad (3)\cdot(-x^3) \iff \begin{matrix} 2xy^3+4\lambda x^3y^3=0 \\ -2x^3y-4\lambda x^3y^3=0 \end{matrix}$$

Wenn wir die beiden obigen Gleichungen addieren, erhalten wir die Gleichung $2xy^3 - 2x^3y = 0 \quad (4)$**. Somit erhalten wir das Gleichungssystem**

$$\iff \begin{array}{c} x^4 + y^4 - 2 = 0 \quad (1) \\ 2xy^3 - 2x^3y = 0 \quad (4) \end{array}$$

$(4) \iff 2xy(y^2 - x^2) = 0 \iff x = 0 \quad \vee \quad y = 0 \quad \vee \quad y^2 = x^2 (d.h \quad y = x \quad \vee \quad y = -x).$

(i) Falls $x = 0$

$$(1) \iff y^4 - 2 = 0 \iff y = \pm\sqrt[4]{2} \implies A = (0, -\sqrt[4]{2}) \quad B = (0, \sqrt[4]{2})\ .$$

(ii) Falls $y = 0$

$$(1) \iff x^4 - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt[4]{2} \implies C = (-\sqrt[4]{2}, 0) \quad D = (\sqrt[4]{2}, 0)\ .$$

(iii) Falls $y = x$

$$(1) \iff 2x^4 - 2 = 0 \iff x = \pm 1 \implies E = (1, 1) \quad F = (-1, -1)\ .$$

(vi) Falls $y = -x$

$$(1) \iff 2x^4 - 2 = 0 \iff x = \pm 1 \implies G = (-1, 1) \quad H = (1, -1)\ .$$

Die Punkte A, B, C, D, E, F, G **und** H **sind die gesuchten Extremstellen.**

Berechnung der Funktionswerte an diesen Punkten.

$$f(A) = 0^2 + (-\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2} = f(B) = f(C) = f(D)\ .$$

$$f(E) = 1^2 + 1^2 = 2 = f(F) = f(G) = f(H)\ .$$

Herleitung der Maximalstellen bzw. Minimalstellen.

Da $f(A) < f(E)$**, dann sind** A, B, C **und** D **die Minimalstellen und** E, F, G, H **die Maximalstellen der Funktion** $f(x, y)$**.**

5.

(a) $A=(-2,0)$**,** $B=(1,2)$ **und** $C=(2,0)$**.**
Man integriere die Funktion $f(x,y)=x$ **über das Innere des Dreiecks** ABC**.**

$$\int f(x,y)_{ABC} = \int f(x,y)_{ABI} + \int f(x,y)_{IBC} \quad \textbf{mit} \quad I=(0,1)\ .$$

Die Bestimmung der Gleichung der Geraden $(AB$ **und** (BC) **ergibt**

$$\begin{array}{rl} (AB): & y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3} \\ (BC): & y=-2x+4 \end{array}$$

$$\int f(x,y)_{ABC} = \int_{-2}^{1}\left(\int_{0}^{\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}} x\,dy\right)dx + \int_{1}^{2}\left(\int_{0}^{-2x+4} x\,dy\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{1} x(\frac{2}{3}x+\frac{4}{3})dx + \int_{1}^{2} x(-2x+4)dx = \frac{4}{3}VE\ .$$

(b) Gegeben sei das Gebiet des $\mathbb{R}^2$**, das im ersten Quadranten liegt**

$$D := \left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 5\ , x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

Benutzen Sie Ellipsenkoordinaten, um das folgende Integral

$$\int_D y\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,d(x,y)$$

zu berechnen.
Hinweis: Parametrisierung der Ellipsenkoordinaten: $x=a\,r\cos(\theta), y=b\,r\sin(\theta)$**, wobei die Determinante der Jacobi-Matrix** $|J|=a\,b\,r$ **ist.**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 5 \iff \frac{(a\,r\cos(\theta))^2}{a^2}+\frac{(b\,r\sin(\theta))^2}{b^2} \le 5 \iff r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)) \le 5$$

$$\Longleftrightarrow r \leq \sqrt{5} \quad \textbf{und} \quad D := \left\{ (r,\theta) \,\middle|\, 0 \leq r \leq \sqrt{5}\,, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\} \; .$$

$$\int\limits_D y\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,d(x,y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\sqrt{5}} b\sin(\theta)\sqrt{\frac{(a\,r\cos(\theta))^2}{a^2}+\frac{(b\,r\sin(\theta))^2}{b^2}}|J|drd\theta$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{\sqrt{5}} ab^2r^3\sin(\theta)dr \right) d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(ab^2\frac{\sqrt{5}^4}{4}\sin(\theta) \right) d\theta = ab^2\frac{\sqrt{5}^4}{4} FE \; .$$