KLAUSUR

Mathe I (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure/Informatiker)

01.09.2011

(Wolfram Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:	Versuch–Nr.:

Unterschrifft:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 22 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$ und $z_2 = -1 - i$.

   (i) Schreiben Sie z_1 und z_2 in Polardarstellung (Rechnen Sie in Grad. Stellen Sie dazu Ihren Taschenrechner auf DEG ein, **nicht** RAD).

   (ii) Bestimmen Sie $w = z_1^6 z_2^8$ und schreiben Sie das Ergebnis in der Form $w = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

   (iii) Wie lauten die Lösungen der Gleichung $z^2 + 4iz = z_2 + 4$ (mit z_2 wie oben)?

   (b) Durch die Gleichung

$$-2x + 3y - z + 1 = 0$$

wird eine Ebene E gegeben. Durch die Punkte $A = (1, 2, 3)$ und $B = (3, 3, 2)$ geht eine Gerade g_1. Sei g_2 die Gerade, deren Parameterdarstellung

$$g_2 : \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$$

ist.

   (i) Man gebe eine Parameterdarstellung der Ebene E. senkrecht stehen und leite hieraus den Abstand zwischen g_2 und E her.

   (ii) Man bestimme den Abstand zwischen g_1 und g_2.

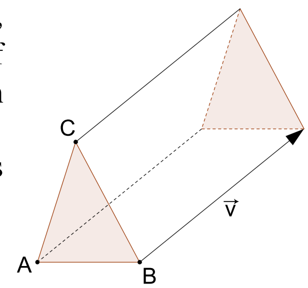
2. (a) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erfüllen folgende Gleichungen,

(1) $$(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = -17$$

(2) $$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 7$$

wobei 2 die Länge des Vektors $\vec{a}$ sei (d.h. $||\vec{a}|| = 2$).
Berechnen Sie die Länge von $\vec{b}$, das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sowie den von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel α (wiederum in Grad).

(b) Die drei Punkte $A = (1,1,2)$, $B = (-1,1,-2)$, $C = (2,c,24)$ spannen im $\mathbb{R}^3$ ein Dreieck auf ($c \in \mathbb{R}$). Verschiebt man dieses Dreieck durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-c^2 \\ 0 \\ 1+c \end{pmatrix}$, so überstreicht es ein Prisma im Raum.



(i) Wie groß ist das Volumen V dieses Prismas?

(ii) Bestimmen Sie c so, dass $V = 0$ wird. Was bedeutet dies geometrisch für die Vektoren $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ und $\vec{v}$?

3. (a) Gegeben sei die Folge definiert durch $v_{n+1} = \frac{1}{4}(4 + v_n^2), n \in \mathbb{N}, v_0 = 0$.

(i) Untersuchen Sie die Monotonie der Folge v_n.

(ii) v_n ist durch 3 beschränkt. Berechnen Sie den Grenzwert von v_n.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Folge

$$v_n = \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} - 3n} + n^2} \ .$$

(c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \ .$$

4. (a) Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1$$

und schreiben Sie $p(x)$ in faktorisierter Form.

(b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{-2x^3 + x^2 + 2x - 1} \ .$$

(i) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \frac{3x - 1}{(-2x+1)(x+1)}, \quad x \neq 1 \ .$$

(ii) Zeigen Sie, dass $x_0 = 1$ eine hebbare Stelle ist (d.h. $\lim_{x \to 1} f(x) \neq \infty$) und bestimmen Sie den Wert, durch welchen $f(x)$ stetig ergänzt werden kann.

(iii) Partialbruchzerlegung:
Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{3x-1}{(-2x+1)(x+1)} = \frac{a}{(-2x+1)} + \frac{b}{(x+1)} \ .$$

(iv) Bestimmen Sie eine Stammfunktion

$$\int f(x)dx \qquad \text{von} \qquad f(x) \ .$$

5. (a) Geben Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{\cosh(x^3) - 1}{x^4}$$

und leiten Sie heraus das Taylorpolynom $T(f, x, 0, 10)$ zehnten Grades um $x_0 = 0$. Hinweis: $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}$

(b) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 e^x}{\sin^2(x)} \ .$$

(c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{\arcsin(x)}$$

Bestimmen Sie eine Stammfunktion

$$\int e^{\arcsin(x)} dx$$

von $f(x)$ mit der Substitution $t = \arcsin(x)$.

Lösungen
1a (i)

$$z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{6} \quad |z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}, \quad \varphi_1 = 2\arctan\left(\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}\right) = -60°$$

$$\Longrightarrow z_1 = 2\sqrt{2}e^{-60° i} = 2\sqrt{2}e^{300° i}$$

$$z_2 = -1 - i\ ; \quad |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi_2 = 2\arctan\left(\frac{-1}{-1+\sqrt{2}}\right) = -135° \Longrightarrow z_2 = \sqrt{2}e^{-135° i} = \sqrt{2}e^{225° i}$$

1a (ii)

$$w = z_1^6 z_2^8 = \left(2\sqrt{2}e^{300° i}\right)^6 \left(\sqrt{2}e^{225° i}\right)^8 = \left(2^6 2^3 e^{300° i \cdot 6}\right)\left(2^4 e^{225° i \cdot 6}\right) = 2^{13} e^{i3600°} = 8192 + 0i\ .$$

1a (iii) Lösungen der Gleichung $z^2 + 4iz = z_2 + 4$

$$z^2 + 4iz = z_2 + 4 \Longleftrightarrow (z+2i)^2 - (2i)^2 = z_2 + 4 \Longleftrightarrow (z+2i)^2 + 4 = z_2 + 4 \Longleftrightarrow (z+2i)^2 = z_2$$

$$\Longleftrightarrow (z+2i)^2 = \sqrt{2}e^{225° i} \Longleftrightarrow z + 2i = \pm\left(\sqrt{2}e^{225° i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow z = 2i + 2^{\frac{1}{4}} e^{112.5° i} \quad \text{oder} \quad z = 2i - 2^{\frac{1}{4}} e^{112.5° i}$$

1b

(i) Parameterdarstellung der Ebene E mit der Gleichung: $-2x + 3y - z + 1 = 0$.
Man setze $z = \mu$, $y = \lambda$ und erhält $-2x + 3\lambda - \mu + 1 = 0$, d.h. $x = \frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}$, somit erhalten wir

$$E: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

(ii) Abstand zwischen g_1 und g_2.
Es ist

$$d(g_1, g_2) = \frac{|(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \cdot (\vec{a_1} \times \vec{a_2})|}{||(\vec{a_1} \times \vec{a_2})||}\ , \quad \text{wobei}$$

$$\vec{r_1} = 0\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a_1} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{a_1} \times \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-3)-(-1)\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)-2\cdot(-3) \\ 2\cdot 1 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{r_2}-\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$d(g_1, g_2) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2\cdot(-3)+(-1)\cdot(-1)|}{4+9+1} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

2a

$$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = -17 \iff ||\vec{a}||^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{a} - 2||\vec{b}||^2 = -17 \iff -\vec{a}\cdot\vec{b} + 2||\vec{b}||^2 = -17 \qquad (1)$$

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 7 \iff ||\vec{a}||^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + ||\vec{b}||^2 = 3 \iff -2\vec{a}\cdot\vec{b} + ||\vec{b}||^2 = 3 \qquad (2)$$

(1) und (2) $\iff$

$$\begin{cases} -\vec{a}\cdot\vec{b} + 2||\vec{b}||^2 = -17 \\ -2\vec{a}\cdot\vec{b} + ||\vec{b}||^2 = 3 \end{cases}$$

$$\implies \vec{a}\cdot\vec{b} = 3 \quad \text{und} \quad ||\vec{b}|| = 3 \implies \cos(\alpha) = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||||\vec{b}||} = \frac{3}{2.3} = \frac{1}{2} \implies \alpha = 60^\circ.$$

2b

$A = (1,1,2)$, $B = (-1,1,-2)$, $C = (2,c,24)$ spannen im $\mathbb{R}^3$ ein Dreieck auf ($c \in \mathbb{R}$). Verschiebt man dieses Dreieck durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-c^2 \\ 0 \\ 1+c \end{pmatrix}$, so überstreicht es ein Prisma im Raum.

(i) Volumen des Prismas:

$$V = \frac{1}{2}\left|(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{v}\right|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ c-1 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(c-1) \\ -44 \\ -2(c-1) \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 4(c-1) \\ -44 \\ -2(c-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-c^2 \\ 0 \\ 1+c \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \big(4(c-1)(1-c^2) - 2(c-1)(c+1)\big) \ .$$

$$\Longrightarrow V = (c-1)(c+1)(-2c+1) \ .$$

(ii) Bestimmen Sie c so, dass $V = 0$ ist.

$$V = 0 \Longleftrightarrow c = 1 \quad \text{oder} \quad c = -1 \quad \text{oder} \quad c = \frac{1}{2} \ .$$

Geometrische Bedeutung von $V = 0$: Die Vektoren $\vec{AB}, \vec{AC}$ und $\vec{v}$ sind koplanar (d.h. liegen auf einer Ebene).

3. (a) Folge $v_{n+1} = \frac{1}{4}(4 + v_n^2), n \in \mathbb{N}, v_0 = 0$.

(i) Monotonie:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(4+v_n^2) - v_n = \frac{1}{4}(v_n^2 - 4v_n + 4) = \frac{1}{4}(v_n - 2)^2 > 0 \ .$$

$\Longrightarrow v_n$ ist monoton steigend.

(ii) v_n ist durch 3 beschränkt. Berechnung des Grenzwertes von v_n. Sei l dieser Grenzwert.

$$\lim_{n\to\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}(4+v_n^2) \Longleftrightarrow l = \frac{1}{4}(4+l^2) \Longleftrightarrow l^2 - 4l - 4 = 0 \Longleftrightarrow l = 2 \ .$$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = 2$.

(b) Grenzwert der Folge

$$v_n = \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} - 3n} + n^2} \ .$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} - 3n} + n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \ .$$

$$v_n = \frac{4n^2-1}{\sqrt[7]{n^{14}-3n}+n^2} = \frac{4n^2-1}{\sqrt[7]{n^{14}(1-3\frac{1}{n^{13}})}+n^2} = \frac{4n^2-1}{\sqrt[7]{n^{14}}\sqrt[7]{(1-3\frac{1}{n^{13}})}+n^2}$$

$$\frac{n^2(4-\frac{1}{n^2})}{n^2(\sqrt[7]{(1-3\frac{1}{n^{13}})}+1)} = \frac{4-\frac{1}{n^2}}{\sqrt[7]{(1-3\frac{1}{n^{13}})}+1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = \frac{4}{1+1} = 2$$

(c) Beweis durch Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \ .$$

(i) Induktionsanfang:

$$n = 1 : \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 ;.$$

(ii) Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \ .$$

(iii) Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \ .$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{3} + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4(n+1)) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4) =$$

$$\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \ .$$

4. (a) Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1 \ .$$

$p(1) = -2+1+2-1 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1$ ist eine Nullstelle von $p(x)$.
Durch Polynomdivision erhalten wir $p(x) : (x-1) = -2x^2 - x + 1$.
Anschließend erhält man mit der $pq-$ Formel $x_2 = -1$ und $x_3 = \frac{1}{2}$ als Nullstellen von $-2x^2 - x + 1$. $\Longrightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$ und $x_3 = \frac{1}{2}$ sind die Nullstellen von $p(x)$.
Faktorisierte Form
$p(x) = -2(x-\frac{1}{2})(x-1)(x+1) = (-2x+1)(x-1)(x+1)$.

(b)
$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{-2x^2 + x^2 + 2x - 1} \ .$$

(i) Man zeige, dass
$$f(x) = \frac{3x-1}{(-2x+1)(x+1)} \ .$$

$3x^2 - 4x + 1$ lässt sich faktorisieren als $(3x-1)(x+1)$, somit ist
$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{-2x^2 + x^2 + 2x - 1} = \frac{(3x-1)(x+1)}{(-2x+1)(x-1)(x+1)} = \frac{3x-1}{(-2x+1)(x+1)} \ .$$

(ii) Man zeige, dass $x_0 = 1$ eine hebbare Stelle ist.
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{3x-1}{(-2x+1)(x+1)} = \frac{3\cdot 1 - 1}{(-2\cdot 1 + 1)(1+1)} = -1 \ .$$
f kann an $x_0 = 1$ durch den Wert -1 ergänzt werden.

(iii) Partialbruchzerlegung:
Man bestimme a, b und c so, dass
$$\frac{3x-1}{(-2x+1)(x+1)} = \frac{a}{(-2x+1)} + \frac{b}{(x+1)} \ .$$

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{(-2x+1)(x+1)} &= \frac{a}{(-2x+1)} + \frac{b}{(x+1)} \ . \\ &= \frac{a(x+1) + b(-2x+1)}{(-2x+1)(x+1)} \\ &= \frac{x(a-2b) + (a+b)}{(-2x+1)(x+1)} \end{aligned}$$

Mit Koeffizientenvergleich erhält man

$$\begin{cases} a - 2b = 3 \\ a + b = -1 \end{cases} \Longrightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3} \ .$$

(iv) Man bestimme

$$\int f(x)dx \ .$$

$$\int f(x)dx = \int \frac{3x-1}{(-2x+1)(x+1)}dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{(-2x+1)} + \frac{-\frac{4}{3}}{(x+1)}dx$$
$$= -\frac{1}{6}\ln|-2x+1| - \frac{4}{3}\ln|x+1| + \text{Const.}$$

5. (a) Man gebe die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{\cosh(x^3) - 1}{x^4} \quad \text{Hinweis : } \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \Longrightarrow \cosh(x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^3)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{6k}}{(2k)!}$$

$$f(x) = \frac{\cosh(x^3) - 1}{x^4} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{6k}}{(2k)!} - 1}{x^4} = \frac{\left(1 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^{12}}{4!} + \frac{x^{18}}{6!} + \frac{x^{24}}{8!} + \cdots\right) - 1}{x^4}$$
$$= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{14}}{6!} + \frac{x^{20}}{8!} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{6k-4}}{(2k)!}$$

Taylorpolynom zehnten Grades:

$$T(f, x, 0, 10) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^{10}) \ .$$

(b) Berechnung von

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 e^x}{\sin^2(x)} \ .$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 e^x}{\sin^2(x)} = \lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{x}{\sin(x)} \right)^2 \cdot e^x \right] = 1^2 \cdot 1 = 1 \ .$$

(c) Man bestimme
$$\int e^{\arcsin(x)} dx$$
mit der Substitution $t = \arcsin(x)$.

$$t = \arcsin(x) \Longleftrightarrow \sin(t) = x \Longrightarrow \cos(t)dt = dx$$
$$I = \int e^{\arcsin(x)} dx = \int e^t \cos(t) dt$$

Mit partieller Integration haben wir:

$$\left\{ \begin{array}{c} u = e^t \Longrightarrow u' = e^t \\ v' = \cos(t) \Longrightarrow v = \sin(t) \end{array} \right. \Longrightarrow I = e^t \sin(t) - \int e^t \sin(t) dt$$

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1 = e^t \Longrightarrow u_1' = e^t \\ v_1' = \sin(t) \Longrightarrow v_1 = -\cos(t) \end{array} \right. \Longrightarrow I = e^t \sin(t) - \left(-e^t \cos(t) + \int e^t \cos(t) \right)$$

$$\Longrightarrow I = e^t \sin(t) + e^t \cos(t) - I \Longrightarrow 2I = (\sin(t) + \cos(t)) e^t$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t)) e^t. \quad \text{Rücksubstitution liefert}$$

$$I = \int e^{\arcsin(x)} dx = \frac{1}{2}(x + \cos(\arcsin(x))) e^{\arcsin(x)} + \text{const.}$$