KLAUSUR

Mathe II (Informatiker)

01.03.2011

(W. Strampp / W. Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie

   (a) das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte von A.

   (b) die Eigenvektoren von A.

   (c) eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix D ist. Geben Sie auch D an.

2. (a) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten x, y und z

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & a-2 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a und b seien beliebige reelle Zahlen).
   Unter welcher Bedingung ist das System

   (i) nicht lösbar?

   (ii) eindeutig lösbar?

   (iii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?

   (b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wird durch die folgende Matrix A von f bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ (d. h. die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) gegeben:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie eine Basis des Kerns sowie eine Basis des Bildes von f, und bestätigen Sie die Dimensionsformel.

Lösungen
1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1a
Charakteristisches Polynom von A.

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(-1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)\ .$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\mathcal{X}_A(\lambda)$. D.h. $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$.

1b
Eigenvektoren von A.
Die Eigenvektoren von A sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems $(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0}$ für $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$.
Für $\lambda_1 = -1$

$$(A - \lambda_1 E)\vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow (A+E)\vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus hat man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = 2(1) + (2) \\ (3') \end{array}$$

Man kann feststellen, dass das Gleichungssystem unterbestimmt ist. Man setze $z = \mu$ und $y = \gamma$.

$$(1') \rightsquigarrow -x - 2\gamma + \mu = 0 \Longrightarrow x = -2\gamma + \mu\ .$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\gamma + \mu \\ \gamma \\ \mu \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass man für den Eigenwert $\lambda = -1$ die l.u. Eigenvektoren $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält .

Genauso erhält man für den Eigenwert $\lambda = 2$ den Eigenvektor $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1c

Eine Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist, wird spaltenweise gebildet aus den Eigenvektoren. Die entsprechende Diagonalmatrix D enthält die Eigenwerte in der Diagonalen.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

2a

Gleichungssystem für die Unbekannten x, y und z

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & a-2 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a und b seien beliebige reelle Zahlen).
Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 3 & a & a-2 & 0 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 3 & a-1 & b \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = -3(1) + (2) \\ (3') = (1) + (3) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & b \\ 0 & -3+a & a+1 & -3b \\ 0 & 0 & a(a-7) & b(a+6) \end{array}\right) \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') = -3(2') + (-3+a)(3') \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist

(i) nicht lösbar, wenn
$a(a-7) = 0$ und $b(a+6) \neq 0$. D.h. wenn ($a = 0$ oder $a = 7$) und $b \neq 0$.

(ii) eindeutig lösbar, wenn
$a(a-7) \neq 0$ D.h. wenn $a \neq 0$ und $a \neq 7$.

(iii) Lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn
$a(a-7) = 0$ und $b(a+6) = 0$ D.h. wenn ($a = 0$ oder $a = 7$) und $b = 0$.

2b

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wird durch die folgende Matrix A (mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung einer Basis des Kerns von f.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Kern}(f) \Longleftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit dem Gauß-Algorithmus erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') \\ (2') = 2(1) + (2) \end{array}$$

Man $z = \mu$ und $y = \gamma$. $(1') \rightsquigarrow -x + 2\gamma + \mu \Longrightarrow x = 2\gamma + \mu$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma + \mu \\ \gamma \\ \mu \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass eine Basis des Kerns von f ist

$$B_1 = \left\{ \vec{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{Dim (Kern } (f)) = 2$$

Bestimmung einer Basis des Bildes von f.

Die lineare unabhängigen Spalten von A bilden eine Basis des Bildes von f. Mit Spaltenumformungen erhält man

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (S_2'(\text{2. Spalte})) = 2(S_1) + (S_2) \\ (S_3') = (S_1) + (S_3) \end{array}$$

Daraus folgt, dass eine Basis des Bildes von f ist

$$B_2 = \left\{ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \text{Dim (Bild } (f)) = 1$$

Bestätigung der Dimensionsformel.

$$\begin{aligned} \text{Dim}(\mathbb{R}^3) &= \text{Dim(Kern } (f)) + \text{Dim(Bild } (f)) \Longleftrightarrow \\ 3 &= 2 + 1 \end{aligned}$$