Klausur Diskrete Strukturen I

(Informatiker)

15. September 2008

(Hans-Georg Rück)

Aufgabe 1 (4 Punkte): Ein Unternehmen stellt die Produkte A und B her. Der Anteil an der Gesamtproduktion beträgt 60% bei A und 40% bei B. Das bewährte Produkt A hat bei der Produktion eine Ausschussrate von 3%, daran soll nichts geändert werden. Auf welchen Wert muss man die Ausschussrate von B senken, um eine Gesamtausschussrate des Unternehmens von 2% zu erreichen?

Aufgabe 2 (6 Punkte): Für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit Erwartungswert $E(X)$ und Varianz $V(X)$ und für jede positive reelle Zahl t gilt bekanntlich die Chebyshevsche Ungleichung

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}\,.$$

Prüfen Sie dies nach, indem Sie die Differenz $P(|X - E(X)| \geq t) - V(X)/t^2$ berechnen und abschätzen für das Beispiel

$$\begin{aligned} \Omega = \{a, b, c\} \qquad \text{mit} \qquad & P(a) = \frac{3}{8}\,,\ P(b) = \frac{1}{2}\,,\ P(c) = \frac{1}{8}\,, \\ & X(a) = 1\,,\ X(b) = 2\,,\ X(c) = 3\,, \\ \text{und alle} \quad & \frac{1}{4} \leq t < \frac{3}{4}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte): Finden Sie eine explizite Lösungsformel für die Folgenglieder x_n, die rekursiv gegeben sind durch

$$x_n = 3\,x_{n-1} + 4\,x_{n-2} - 12\,x_{n-3} \text{ für } n \geq 3$$

mit den Anfangswerten

$$x_0 = 2\,,\ x_1 = 0\,,\ x_2 = 8\,.$$

Berechnen Sie explizit x_{19327}.

Aufgabe 4 (6 Punkte): a) Definieren Sie, was es heißt, dass eine Abbildung $f : M \to N$ injektiv ist.

b) Für eine beliebige natürliche Zahl n seien

$$M = \{1, 2, 3, \ldots, n\} \text{ und } N = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, n+2\}\,.$$

Wie viele verschiedene Abbildungen $f : M \to N$ gibt es? Wieviele davon sind injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig!

Aufgabe 5 (5 Punkte): In einem Landtag mit 199 Sitzen seien drei Parteien vertreten. Wie viele mögliche Sitzverteilungen gibt es in diesem Fall? Bei wie vielen davon hat keine der Parteien die absolute Mehrheit? Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig!

Lösungen:

Aufgabe 1: Es gilt $P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ und $P(B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$. Es bezeichne C das Ereignis "Ausschuss". Es ist $P(C|A) = \frac{3}{100}$. Die Gesamtausschussrate $P(C)$ soll gleich $\frac{2}{100}$ sein. Zu bestimmen ist $P(C|B)$. Es gilt nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{100} = P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = \frac{3}{100} \cdot \frac{3}{5} + P(C|B) \cdot \frac{2}{5}.$$

Auflösen der Gleichung nach $P(C|B)$ liefert $P(C|B) = 0,005$. Die Ausschussrate für das Produkt B muss also auf $0,5\%$ gesenkt werden, damit die Gesamtausschussrate 2% beträgt.

Aufgabe 2: Die Aufgabe ist, die Chebyshevsche Ungleichung für $\frac{1}{4} \leq t < \frac{3}{4}$ nachzuprüfen, indem wir zeigen, dass $P(|X - E(X)| \geq t) - \frac{V(X)}{t^2}$ kleiner oder gleich 0 ist.

Wir berechnen zunächst den Erwartungswert von X

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) = 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

und die Varianz von X

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{8} - \frac{49}{16} = \frac{28}{8} - \frac{49}{16} = \frac{7}{16}.$$

Die Zufallsvariable X kann nur die Werte 1,2 oder 3 annehmen. Wir setzen 1,2 und 3 in $|X - E(X)|$ ein und erhalten $|1 - E(X)| = \frac{3}{4}$, $|2 - E(X)| = \frac{1}{4}$ und $|3 - E(X)| = \frac{5}{4}$. Für t unterscheiden wir zwei Fälle, wir behandeln zuerst den allgemeineren Fall:

<u>1. Fall:</u> Sei $\frac{1}{4} < t < \frac{3}{4}$.

Dann ist $|X - E(X)| \geq t$ für $X = 1$ und $X = 3$ erfüllt. Somit gilt $P(|X - E(X)| \geq t) = P(X = 1) + P(X = 3) = P(\{a, c\}) = \frac{1}{2}$. Wir erhalten

$$P(|X - E(X)| \geq t) - \frac{V(X)}{t^2} = \frac{1}{2} - \frac{7}{16t^2}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\frac{1}{2} - \frac{7}{16t^2}$ kleiner oder gleich 0 ist. Aus $t < \frac{3}{4}$ erhalten wir sofort $t^2 < \frac{9}{16} < \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$. Subtrahieren von $\frac{7}{8}$ und auf den Hauptnenner bringen liefert $\frac{8t^2-7}{8} < 0$. Multiplikation mit $\frac{1}{2t^2}$ ergibt $\frac{8t^2-7}{16t^2} < 0$. Bringen wir $\frac{1}{2} - \frac{7}{16t^2}$ auf den Hauptnenner, so erhalten wir $\frac{8t^2-7}{16t^2}$, was kleiner 0 ist. Somit ist auch $\frac{1}{2} - \frac{7}{16t^2}$ kleiner 0.

<u>2. Fall:</u> Sei $t = \frac{1}{4}$.

Dann ist $|X - E(X)| \geq t = \frac{1}{4}$ für $X = 1$, $X = 2$ und $X = 3$ erfüllt. Somit ist $P(|X - E(X)| \geq t) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = P(\{a, b, c\}) = 1$. Wir erhalten

$$P(|X - E(X)| \geq t) - \frac{V(X)}{t^2} = 1 - \frac{7}{16t^2} = 1 - 7 = -6 < 0.$$

Aufgabe 3: Die Rekursion ist gegeben durch $x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2} - 12x_{n-3}$. Also ist das charakteristische Polynom $\chi(X) = X^3 - 3X^2 - 4X + 12$. Wir raten die Nullstelle $\lambda_1 = 2$ von $\chi(X)$. Durch Polynomdivision erhalten wir $(X^3 - 3X^2 - 4X + 12) : (X - 2) = X^2 - X - 6$. Die Nullstellen des Polynoms $X^2 - X - 6$ sind $\lambda_{2/3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$, also $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = -2$.

Wir verwenden den Ansatz $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^n + c \cdot (-2)^n$. Einsetzen der Startwerte der Aufgabenstellung ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 &= x_0 = a + b + c \\ 0 &= x_1 = 2a + 3b - 2c \\ 8 &= x_2 = 4a + 9b + 4c. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem lösen wir mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und erhalten die Lösung $b = 0$, $c = 1$ und $a = 1$. Wir erhalten also die explizite Formel

$$x_n = 2^n + (-2)^n.$$

Es gilt also $x_{19.327} = 2^{19.327} + (-2)^{19.327} = 0$.

Aufgabe 4:

a) Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt injektiv, wenn für alle $m_1, m_2 \in M$ aus $f(m_1) = f(m_2)$ folgt, dass $m_1 = m_2$ gilt.

b) Anzahl der Abbildungen: Jedem der n Element aus M kann man jedes Element der $n+2$ Elemente aus N zuordnen. Es gibt also $(n+2)^n$ Abbildungen $f: M \to N$.

Anzahl der injektiven Abbildungen: Der 1 können wir jedes der $n+2$ Elemente von M zuordnen. Da f injektiv sein soll, können wir dieses Element nicht der 2 zuordnen. Wir können der 2 also nur $n+1$ Elemente zuordnen. Ebenso können wir das Bild der 1 und das Bild der 2 nicht der 3 zuordnen. Wir können der 3 also eines der verbleibenden n Elemente zuordnen, usw.

Es gibt also $(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \ldots \cdot 3 = \frac{(n+2)!}{2}$ injektive Abbildungen $f: M \to N$.

Aufgabe 5: Es sollen drei Parteien vertreten sein. Jede Partei hat also mindestens einen Sitz. Es verbleiben $199 - 3 = 196$ Sitze auf die drei Parteien zu verteilen. Wir ziehen also $k = 196$-mal nacheinander mit zurücklegen und ohne Reihenfolge aus $n = 3$ Parteien. Es gibt also

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{198}{2} = \frac{198 \cdot 197}{2 \cdot 1} = 99 \cdot 197 = 19.503$$

mögliche Sitzverteilungen.

Wenn eine Partei die absolute Mehrheit hat, dann hat sie mindestens 100 Sitze, die anderen haben mindestens einen, es bleiben also $k = 199 - 100 - 2 = 97$ Sitze auf die $n = 3$ Parteien zu verteilen. Es gibt also

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{99}{2} = 99 \cdot 49 = 4.851$$

Möglichkeiten. Das kann für jede Partei auftreten. Wir haben also $19.503 - 3 \cdot 4.851 = 4.950$ Möglichkeiten, bei denen keine Partei die absolute Mehrheit hat.