# Klausur Diskrete Strukturen II

**(Informatiker)**

9. März 2009

(Hans-Georg Rück)

**Aufgabe 1 (6 Punkte):** Ein *Kneser-Graph* $KG(n, k)$ mit Parametern $n$ und $k$ ist wie folgt definiert: Die Knotenmenge besteht aus allen $k$-elementigen Teilmengen einer $n$-elementigen Menge. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die beiden zugehörigen Teilmengen einen leeren Schnitt haben.

a) Zeichnen (und erklären) Sie den Kneser-Graph $KG(5, 2)$.

b) Wieder allgemein, wie viele Knoten hat der Kneser-Graph $KG(n, k)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Wie viele Kanten hat der Kneser-Graph $KG(n, k)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 2 (6 Punkte):** Es sei $S$ eine endliche Menge mit $n$ Elementen. Wir betrachten dazu die Menge $B$ aller Abbildungen $f : S \to \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$. Auf $B$ definieren wir folgende Operationen mithilfe der gewöhnlichen Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
(f \odot g)(a) &:= f(a) \cdot g(a), \\
(f \oplus g)(a) &:= f(a) + g(a) + f(a) \cdot g(a), \\
(\neg f)(a) &:= f(a) + 1.
\end{aligned}$$

a) Wie viele Elemente enthält $B$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} := (B, \oplus, \odot, \neg)$ eine Boolesche Algebra ist. Die Kommutativität und Assoziativität von $\oplus$ und $\odot$ brauchen Sie nicht nachzuweisen.

c) Geben Sie eine Menge $M$ an, so dass die Boolsche Algebra $\mathcal{A}$ isomorph zur Potenzmengenalgebra $(\mathcal{P}ot(M), \cup, \cap, ^{-})$ ist. Erläutern Sie dabei insbesondere, wie bei diesem Isomorphismus ein $f \in B$ mit einem $N \in \mathcal{P}ot(M)$ identifiziert wird.

**Aufgabe 3 (7 Punkte):**

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Restklassen $\overline{a}$ ein multiplikativ Inverses in $\mathbb{Z}/m\,\mathbb{Z}$ haben. Wenn dies so ist, dann berechnen Sie $\overline{a}^{-1}$, andernfalls begründen Sie die Nichtexistenz des Inversen.

$$\overline{91} \in \mathbb{Z}/57\,\mathbb{Z} \quad , \quad \overline{124} \in \mathbb{Z}/456\,\mathbb{Z} \quad , \quad \overline{79} \in \mathbb{Z}/87\,\mathbb{Z}\,.$$

b) Berechnen Sie $a, b \in \mathbb{Z}$, für die gilt

$$a \cdot 124 + b \cdot 456 = 12\,.$$

c) Berechnen Sie eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ des Systems von Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 6 \\ 5\,x &\equiv 6 \mod 11\,. \end{aligned}$$

**Aufgabe 4 (6 Punkte):**

a) Definieren Sie, wann ein Graph $G$ vollständig bipartit genannt wird.

b) Wann ist ein vollständig bipartiter Graph $G$ eulersch?

c) Wann ist ein vollständig bipartiter Graph $G$ hamiltonsch?

d) Berechnen Sie die chromatische Zahl $\chi(G)$ eines vollständigen bipartiten Graphen $G$.

**Aufgabe 5 (4 Punkte):** Eine ganze Zahl $g$ heißt *Primitivwurzel* modulo einer Primzahl $p$, wenn ihre Restklasse $\overline{g}$ die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z})^*$ erzeugt, d.h. wenn

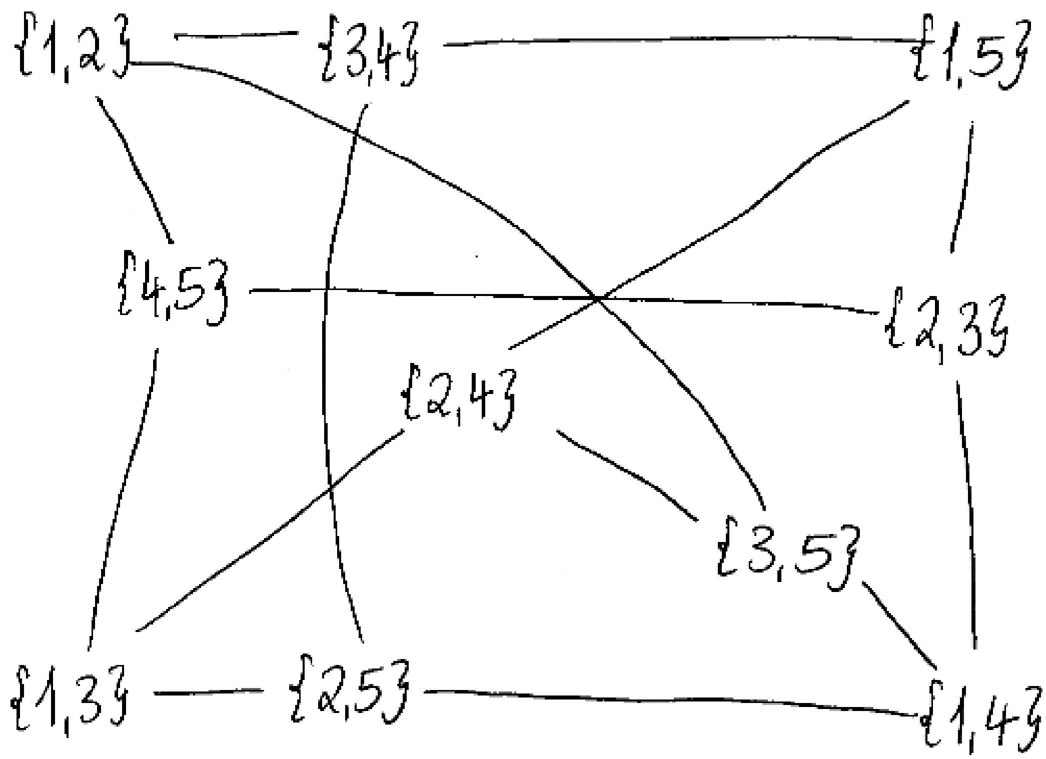
$$(\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z})^* = \{\overline{g}^k \mid k = 0, \ldots, p-2\}\,.$$

Berechnen Sie eine Primitivwurzel modulo der Primzahl 11.

**Musterlösung**

## Aufgabe 1

(a) Wir betrachten als exemplarische Menge mit fünf Elementen die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dann hat $KG(5, 2)$ folgende Gestalt:




(b) Die Anzahl der Knoten ist die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen einer $n$-elementigen Menge, also $\binom{n}{k}$.

(c) Der Knoten $T_i$ ist mit dem Knoten $T_j$ durch eine Kante verbunden, wenn $T_i \cap T_j = \varnothing$ gilt, wobei $T_i$ und $T_j$ $k$-elementige Teilmengen einer $n$-elementigen Menge $M$ sind. Um die Anzahl der von einem Knoten $T_i$ ausgehenden Kanten zu ermitteln, muss man also die Frage klären, wie viele $k$-elementige Teilmengen einer $n$-elementigen Menge es gibt, deren Schnitt mit $T_i$ leer ist. Dies sind aber genau die $k$-elementigen Teilmengen der $n-k$-elementigen Menge $M \backslash T_i$, also $\binom{n-k}{k}$ Stück. Da es insgesamt $\binom{n}{k}$ Knoten gibt und jede Kante von zwei Knoten ausgeht, gibt es insgesamt $\frac{1}{2}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$ Kanten.

**Aufgabe 2**

(a) Die Menge $B$ enthält $2^n$ Elemente, denn dies ist die Anzahl aller Abbildungen einer $n$-elementigen Menge in eine 2-elementige Menge (ziehe $n$-mal mit Zurücklegen aus einer 2-elementigen Menge, mit Beachtung der Reihenfolge).

(b) Zu zeigen ist, dass $\mathcal{A} := (B, \oplus, \odot, \neg)$ eine Boolesche Algebra ist (ohne Kommutativität/Assoziativität von $\oplus, \odot$). Hierfür ist zu zeigen:

- Es gibt ein neutrales Element $0 \in B$ der Operation $\oplus$.
  Das neutrale Element ist die Abbildung $0 : S \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, a \mapsto 0$, denn für alle $f \in B$ und für alle $a \in S$ gilt:
  $$(f \oplus 0)(a) = f(a) + 0 + f(a) \cdot 0 = f(a),$$
  also ist $f \oplus 0 = f$.
- Es gibt ein neutrales Element $1 \in B$ der Operation $\odot$.
  Das neutrale Element ist die Abbildung $1 : S \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, a \mapsto 1$, denn für alle $f \in B$ und für alle $a \in S$ gilt:
  $$(f \odot 1)(a) = f(a) \cdot 1 = f(a),$$
  also ist $f \odot 1 = f$.
- Für alle $f \in B$ gilt: $f \oplus \neg f = 1$.
  Sei $a \in S$, dann ist
  $$\begin{aligned}(f \oplus \neg f)(a) &= f(a) + (\neg f(a)) + f(a) \cdot (\neg f(a)) \\ &= f(a) + f(a) + 1 + f(a) \cdot (f(a) + 1) \\ &= 0 + 1 + f(a) + f(a) = 1.\end{aligned}$$
  Jedes $a \in S$ wird also durch $f \oplus \neg f$ auf $1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ abgebildet, daher ist $f \oplus \neg f = 1 \in B$.
- Für alle $f \in B$ gilt: $f \odot \neg f = 0$.
  Sei $a \in S$, dann ist
  $$(f \odot \neg f)(a) = f(a) \cdot (f(a) + 1) = f(a) + f(a) = 0.$$
  Jedes $a \in S$ wird also durch $f \odot \neg f$ auf $0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ abgebildet, daher ist $f \odot \neg f = 0 \in B$.

- Für alle $f, g, h \in B$ gilt: $f \odot (g \oplus h) = (f \odot g) \oplus (f \odot h)$.
  Sei $a \in S$, dann ist

$$\begin{aligned}
(f \odot (g \oplus h))(a) &= f \odot (g(a) + h(a) + g(a) \cdot h(a)) \\
&= f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot h(a) + f(a) \cdot g(a) \cdot h(a), \\
(f \odot g)(a) \oplus (f \odot h)(a) &= (f(a) \cdot g(a)) \oplus (f(a) \cdot h(a)) \\
&= f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot h(a) + f(a) \cdot g(a) \cdot h(a),
\end{aligned}$$

  womit die Gleichheit der Ausdrücke gezeigt ist.

- Für alle $f, g, h \in B$ gilt: $f \oplus (g \odot h) = (f \oplus g) \odot (f \oplus h)$.
  Sei $a \in S$, dann ist

$$\begin{aligned}
(f \oplus (g \odot h))(a) &= f(a) \oplus g(a) \cdot h(a) \\
&= f(a) + g(a) \cdot h(a) + f(a) \cdot g(a) \cdot h(a), \\
((f \oplus g) \odot (f \oplus h))(a) &= (f(a) + g(a) + f(a) \cdot g(a)) \\
&\quad \odot (f(a) + h(a) + f(a) \cdot h(a)) \\
&= f(a) + f(a) \cdot h(a) + f(a) \cdot h(a) \\
&\quad + f(a) \cdot g(a) + g(a) \cdot h(a) \\
&\quad + f(a) \cdot g(a) \cdot h(a) + f(a) \cdot g(a) \\
&\quad + f(a) \cdot g(a) \cdot h(a) + f(a) \cdot g(a) \cdot h(a) \\
&= f(a) + g(a) \cdot h(a) + f(a) \cdot g(a) \cdot h(a).
\end{aligned}$$

(c) Sei $S = \{a_1, \dots, a_n\}$. Die Atome von $\mathcal{A}$ sind die Abbildungen $f_i : S \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, a_j \mapsto \delta_{ij}$, also die Abbildung, die $a_i$ den Wert 1 zuweist und allen anderen Elementen den Wert 0. Denn sei $f \in B$, dann ist $f = f_{i_1} \oplus \dots \oplus f_{i_k}$, wobei gerade die $i_j$ in der Summe auftauchen, für die $f(a_{i_j}) = 1$ gilt.
Also ist $\mathcal{A}$ eine Boolesche Algebra mit $n$ Atomen. Nach einem Satz aus der Vorlesung kann man eine solche Boolesche Algebra mit der Potenzmengenalgebra $\mathcal{P}$ auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ identifizieren, es gilt daher $M = \{1, \dots, n\}$. Sei nun $f \in B$ mit $A_f := \{a_i \in S | f(a_i) = 1\}$ und sei $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}$ der Isomorphismus. Dann ist $\varphi(f) = \{i | a_i \in A_f\}$. Sei umgekehrt $A \in \mathcal{P}ot(M)$. Dann ist $\varphi^{-1}(A) = f_A$ mit $f_A(a_i) = 1 \Leftrightarrow i \in A$.

**Aufgabe 3**

(a) Eine Restklasse $\overline{a}$ hat genau dann ein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}/m\,\mathbb{Z}$, wenn $a$ und $m$ Teilerfremd sind. Dieses überprüft man mit dem Erweiterten Euklidischen Algorithmus, da man auch, wenn vorhanden, gleich das multiplikative Inverse angeben kann:

- $1 = \mathrm{ggT}(91, 57) = (-5) \cdot 91 + 8 \cdot 57$, also ist $\overline{52}$ das multiplikative Inverse von $\overline{91}$.
- $4 = \mathrm{ggT}(124, 456)$, daher hat $\overline{124}$ kein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}/456\,\mathbb{Z}$.
- $1 = \mathrm{ggT}(79, 87) = (-11) \cdot 79 + 10 \cdot 87$, somit ist $\overline{76}$ das multiplikative Inverse von $\overline{87}$.

(b) Gesucht waren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit

$$a \cdot 124 + b \cdot 456 = 12\,.$$

Da $\mathrm{ggT}(124, 456) = 4$ und $4|12$, existieren Lösungen. Berechnet man via dem Erweiterten Euklidischen Algorithmus eine Darstellung, so folgt

$$12 = 3 \cdot 4 = 3((-11) \cdot 124 + 4 \cdot 456) = (-33) \cdot 124 + 12 \cdot 456.$$

(c) Da $\overline{9} = \overline{5}^{-1}$ in $\mathbb{Z}/11\,\mathbb{Z}$, ist das System von Kongruenzen aus der Aufgabenstellung äquivalent zum folgenden System:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 6 \\ x &\equiv 10 \mod 11\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Darstellung des größten gemeinsamen Teilers von 6 und 11 folgt, dass $x = 1 \cdot (-1) \cdot 11 + 10 \cdot 2 \cdot 6 = 109$ eine Lösung ist.

**Aufgabe 4**

(a) Ein Graph $G = K_{m,n}$ heißt vollständig bipartit, wenn er aus zwei Mengen mit m bzw. n Knoten bestehen, wobei jeder Knoten in der ersten Menge zu jedem Knoten in der zweiten Menge verbunden ist, während alle Knoten innerhalb der gleichen Menge untereinander nicht verbunden sind.

(b) Ein Graph ist Eulersch, wenn er zusammenhängend ist und der Kantengrad jeder Kante gerade ist. Also ist $K_{m,n}$ genau dann Eulersch, wenn $m$ und $n$ positiv und gerade sind.

(c) Ist $n > 1$, so folgt aus dem Satz von Ore, dass $K_{n,n}$ hamiltonsch ist. Wir zeigen nun, wenn $m \neq n$ ist, dass dann $K_{n,m} = (V_m \cup V_n, E)$ nicht hamiltonsch ist, wobei $V_m \cap V_n = \emptyset$ und $|V_m| = m$ sowie $|V_n| = n$ gelte.

Sei ohne Einschränkung $m < n$.

Da ein Hamilton-Kreis durch jeden Knoten genau einmal hindurchläuft, können wir einen beliebigen Startpunkt wählen. Wähle $v_{m,1} \in V_m$. Da $V_m \cap V_n = \emptyset$, muss als nächster Knoten ein Knoten aus $V_n$ getroffen werden, sagen wir $v_{n,1} \in V_n$. Der nächste Knoten muss dann wieder aus $V_m$ kommen und so weiter. Nach $2m$-Schritten haben wir einen Pfad der Form

$$(v_{m,1}, v_{n,1}, v_{m,2}, v_{n,2}, ..., v_{m,m}, v_{n,m})$$

mit $v_{n,i} \in V_n$ und $v_{m,i} \in V_m$ für alle $1 \leq i \leq m$.

Da $n > m$, gibt es noch Knoten in $V_n \setminus \{v_{n,1}, ..., v_{n,m}\}$, welche vom Pfad noch nicht getroffen wurden. Allerdings sind schon alle Knoten aus $V_m$ getroffen worden. Da keiner der Knoten jeweils in $V_n$ und $V_m$ miteinander verbunden sind, gibt es keinen Knoten mehr, der mit $v_{n,m}$ verbunden ist und noch nicht im Pfad enthalten ist. Somit kann es keinen Hamilton-Kreis geben.

(d) Es gilt $\chi(K_{m,n}) = 2$, da es zwei disjunkte Knotenmengen gibt, in der jeweils keine der Knoten miteinander verbunden sind, aber jeder Knoten in der ersten Menge zu jedem Knoten in der zweiten Menge verbunden ist. Somit färbt man die Knoten in der einen Knotenmenge mit der ersten Farbe und die Knoten in der zweiten Knotenmenge mit der zweiten Farbe. Da jeder Knoten der einen Menge mit jedem der anderen Menge verbunden ist, ist $\chi(K_{m,n}) = 2$ auch minimal.

**Aufgabe 5** Es gilt: $\#(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^* = 10$, d.h. Untergruppen von $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$ haben die Ordnung 2 oder 5. Um zu testen, ob eine ganze Zahl $g$ eine Primitivwurzel modulo 11 ist, reicht es also aus, die Potenzen $g^2$ und $g^5$ zu berechnen. Sind diese ungleich $1 \mod 11$, dann erzeugt $g$ die ganze multiplikative Gruppe. Wir beginnen mit der 2. Es ist $2^2 = 4 \equiv 4 \mod 11\mathbb{Z}$ und
$2^5 = 32 \equiv 10 \mod 11\mathbb{Z}$. Also ist 2 eine Primitivwurzel modulo 11.