KLAUSUR

Diskrete Strukturen I
Sommersemester 2007

17. 9. 2007

(W. M. Seiler)

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:

Bitte schreiben Sie auf jedes Ihrer Blätter an den oberen Rand Ihren Namen und Vornamen sowie auch Ihre Matrikelnummer.

Zum Bestehen der Klausur sollten 40 Punkte erreicht werden.

Bitte schreiben Sie so, daß man Ihre Schrift auch lesen kann!

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.a)	7.b)

Punkte:	Note:

Klausur (17. 9. 2007)

1. Aufgabe (12 Punkte)
Verifizieren Sie (durch Wahrheitswertetabellen oder durch gleichwertige Umformungen) die aussagenlogische Gleichwertigkeit $\big((p \vee r) \vee q\big) \rightarrow (p \wedge r) \;\equiv\; (p \leftrightarrow r) \wedge \big(q \rightarrow (p \wedge r)\big)$.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Gegeben seien die 1-elementige Menge $A = \{0\}$ und die 2-elementige Menge $B = \{1, 2\}$. Bestimmen Sie die folgenden fünf Mengen: $A \times B$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$, $\mathcal{P}(A \times B)$, $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

3. Aufgabe (12 Punkte)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ die Summenformel $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 2n^4 - n^2$ gilt.

4. Aufgabe (19 Punkte)
Eine Urne enthält sechs rote, drei grüne und fünf blaue Kugeln (und sonst nichts mehr). Man zieht zufällig ohne Zurücklegen nacheinander zwei Kugeln aus der Urne.
   i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste gezogene Kugel rot, wenn die zweite gezogene Kugel grün ist?
   ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die beiden gezogenen Kugeln gleichfarbig? Sind bei diesem Experiment die zwei Ereignisse "die erste gezogene Kugel ist blau" und "die beiden gezogenen Kugeln sind gleichfarbig" abhängig oder unabhängig?

5. Aufgabe (7 Punkte)
Zwischen 1 und 49 gibt es genau 15 Primzahlen (nämlich 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 und 47). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Ziehung des Samstagslottos "6 aus 49" genau zwei der sechs gezogenen Zahlen Primzahlen sind? (Sie brauchen bei Ihrem Ergebnis die Produkte im Zähler und im Nenner nicht auszumultiplizieren, stattdessen sollten Sie aber möglichst viel kürzen, so daß im Zähler und im Nenner keine gemeinsamen Primfaktoren mehr vorkommen.)

6. Aufgabe (18 Punkte)
Ich schlage Ihnen das folgende Glücksspiel vor: Sie würfeln mit einem Würfel und ich würfle auch mit einem Würfel. Wenn die Summe der zwei Augenzahlen nicht durch 3 teilbar ist, so erhalten Sie von mir diese Summe. Wenn die Summe der zwei Augenzahlen durch 3 teilbar ist, so erhalte ich von Ihnen das Doppelte dieser Summe. (In diesem Fall verlieren Sie die doppelte Summe, d.h. Ihr Gewinn ist in diesem Fall negativ.) Die Zufallsvariable X beschreibe Ihren Gewinn bei diesem Spiel. Bestimmen Sie den zugrunde liegenden Ergebnisraum Ω, den Wertebereich $X(\Omega)$, die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ für alle $k \in X(\Omega)$ sowie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$. Zu wessen Gunsten ist dieses Spiel oder ist es ein faires Spiel?

7. Aufgabe (11+16 Punkte)
Finden Sie explizite Lösungsformeln für x_n, wenn x_n durch die folgenden Rekursionen definiert wird:
   a) $x_0 = 3$, $x_1 = 30$ und $x_n = 18x_{n-1} - 81x_{n-2}$ für $n \geq 2$
   b) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 24$ und $x_n = 4x_{n-1} + 20x_{n-2} - 48x_{n-3}$ für $n \geq 3$

Musterlösung zur Klausur (17. 9. 2007)

1. Aufgabe (12 Punkte)
Verifizieren Sie (durch Wahrheitswertetabellen oder durch gleichwertige Umformungen) die aussagenlogische Gleichwertigkeit $\big((p\vee r)\vee q\big) \to (p\wedge r) \;\equiv\; (p \leftrightarrow r)\wedge\big(q \to (p\wedge r)\big)$.

p	q	r	$p \vee r$	$(p \vee r) \vee q$	$p \wedge r$	$\big((p \vee r) \vee q\big) \to (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

p	q	r	$p \wedge r$	$q \to (p \wedge r)$	$p \leftrightarrow r$	$(p \leftrightarrow r) \wedge (q \to (p \wedge r))$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Die beiden letzten Spalten sind identisch, also gilt die zu verifizierende Gleichwertigkeit.
Oder:
Mit Hilfe der beiden Gleichwertigkeiten $p \leftrightarrow r \;\equiv\; (p \vee r) \to (p \wedge r)$ (siehe Übungsaufgabe 1.2i) und $(p \vee q) \to r \;\equiv\; (p \to r) \wedge (q \to r)$ (siehe Übungsaufgabe 1.2k) folgt $\big((p\vee r)\vee q\big) \to (p\wedge r) \;\equiv\; \big((p\vee r) \to (p\wedge r)\big)\wedge\big(q \to (p\wedge r)\big) \;\equiv\; (p \leftrightarrow r)\wedge\big(q \to (p\wedge r)\big)$.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Gegeben seien die 1-elementige Menge $A = \{0\}$ und die 2-elementige Menge $B = \{1, 2\}$. Bestimmen Sie die folgenden fünf Mengen: $A\times B$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$, $\mathcal{P}(A\times B)$, $\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$.

$$\begin{aligned}
A\times B &= \{(0,1),(0,2)\}\\
\mathcal{P}(A) &= \big\{\emptyset,\{0\}\big\}\\
\mathcal{P}(B) &= \big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\big\}\\
\mathcal{P}(A\times B) &= \big\{\emptyset,\{(0,1)\},\{(0,2)\},\{(0,1),(0,2)\}\big\}\\
\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) &= \Big\{(\emptyset,\emptyset),(\emptyset,\{1\}),(\emptyset,\{2\}),(\emptyset,\{1,2\}),\\
&\qquad(\{0\},\emptyset),(\{0\},\{1\}),(\{0\},\{2\}),(\{0\},\{1,2\})\Big\}
\end{aligned}$$

3. Aufgabe (12 Punkte)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ die Summenformel $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 2n^4 - n^2$ gilt.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = \sum_{k=1}^{1} (2k-1)^3 = (2 \cdot 1 - 1)^3 = 1^3 = 1 = 2 - 1 = 2 \cdot 1^4 - 1^2 = 2n^4 - n^2.$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, für ein festes $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ gelte

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 2n^4 - n^2.$$

Induktionsschritt: Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung zeigen wir, daß auch

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^3 = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$$

gilt, denn

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^3 &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 + \big(2(n+1)-1\big)^3 \\
&= 2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 \\
&= 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 3 \cdot 4n^2 + 3 \cdot 2n + 1 \\
&= 2n^4 + 2 \cdot 4n^3 + 2 \cdot 6n^2 + 2 \cdot 4n + 2 - n^2 - 2n - 1 \\
&= 2\big(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1\big) - \big(n^2 + 2n + 1\big) \\
&= 2(n+1)^4 - (n+1)^2.
\end{aligned}$$

4. Aufgabe (19 Punkte)
Eine Urne enthält sechs rote, drei grüne und fünf blaue Kugeln (und sonst nichts mehr). Man zieht zufällig ohne Zurücklegen nacheinander zwei Kugeln aus der Urne.
   i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste gezogene Kugel rot, wenn die zweite gezogene Kugel grün ist?
   Es bezeichne R_1, G_1 sowie B_1 das Ereignis, daß die erste gezogene Kugel rot, grün bzw. blau ist und entsprechend bezeichne R_2, G_2 sowie B_2 das Ereignis, daß die zweite gezogene Kugel rot, grün bzw. blau ist. Gefragt ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(R_1|G_2)$.
   Bekannt sind gemäß der Voraussetzung die Wahrscheinlichkeiten $P(R_1) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$, $P(G_1) = \frac{3}{14}$ sowie $P(B_1) = \frac{5}{14}$ und, da ohne Zurücklegen gezogen wird, auch die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(G_2|R_1) = \frac{3}{13} = P(G_2|B_1)$ sowie $P(G_2|G_1) = \frac{2}{13}$. Die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit liefert die Wahrscheinlichkeit $P(G_2) = P(G_2|R_1)P(R_1) + P(G_2|G_1)P(G_1) + P(G_2|B_1)P(B_1) = \frac{3}{13} \cdot \frac{6}{14} + \frac{2}{13} \cdot \frac{3}{14} + \frac{3}{13} \cdot \frac{5}{14} = \frac{3}{14}$, also $P(G_2) = \frac{3}{14}$, und die Bayessche Formel (bzw. die Definition bedingter Wahrscheinlichkeit) dann die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(R_1|G_2) = \frac{P(R_1 \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{P(G_2|R_1)P(R_1)}{P(G_2)} = \frac{\frac{3}{13} \cdot \frac{6}{14}}{\frac{3}{14}} = \frac{6}{13}, \text{ also } P(R_1|G_2) = \frac{6}{13}.$$

ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die beiden gezogenen Kugeln gleichfarbig? Sind bei diesem Experiment die zwei Ereignisse “die erste gezogene Kugel ist blau” und “die beiden gezogenen Kugeln sind gleichfarbig” abhängig oder unabhängig?

Zusätzlich zu den in der Lösung für Teil i) verwendeten Bezeichnungen bezeichne nun noch A das Ereignis, daß die beiden gezogenen Kugeln gleichfarbig sind, d.h. es gilt $A = (R_1 \cap R_2) \cup (G_1 \cap G_2) \cup (B_1 \cap B_2)$, wobei die drei Schnittmengen paarweise disjunkt sind. Daher gilt dann $P(A) = P(R_2 \cap R_1) + P(G_2 \cap G_1) + P(B_2 \cap B_1) = P(R_2|R_1)P(R_1) + P(G_2|G_1)P(G_1) + P(B_2|B_1)P(B_1) = \frac{5}{13} \cdot \frac{6}{14} + \frac{2}{13} \cdot \frac{3}{14} + \frac{4}{13} \cdot \frac{5}{14} = \frac{4}{13}$, also $P(A) = \frac{4}{13}$. Weiter gilt $A \cap B_1 = B_2 \cap B_1$ und somit $P(A \cap B_1) = P(B_2 \cap B_1) = P(B_2|B_1)P(B_1) = \frac{4}{13} \cdot \frac{5}{14} = P(A)P(B_1)$, also $P(A \cap B_1) = P(A)P(B_1)$, d.h. die beiden Ereignisse A und B_1 sind unabhängig.

5. Aufgabe (7 Punkte)
Zwischen 1 und 49 gibt es genau 15 Primzahlen (nämlich 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 und 47). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Ziehung des Samstagslottos “6 aus 49” genau zwei der sechs gezogenen Zahlen Primzahlen sind? (Sie brauchen bei Ihrem Ergebnis die Produkte im Zähler und im Nenner nicht auszumultiplizieren, stattdessen sollten Sie aber möglichst viel kürzen, so daß im Zähler und im Nenner keine gemeinsamen Primfaktoren mehr vorkommen.)

Mit Hilfe der hypergeometrischen Verteilung berechnet sich diese Wahrscheinlichkeit zu

$$\begin{aligned} h_{49,15,6}(2) &= \frac{\binom{15}{2}\binom{49-15}{6-2}}{\binom{49}{6}} = \frac{\binom{15}{2}\binom{34}{4}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} \cdot \frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} \\ &= \frac{15 \cdot 7 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 5 \cdot 6}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{15 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 31 \cdot 5 \cdot 6}{7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 47 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 11} = \frac{5 \cdot 17 \cdot 31}{7 \cdot 23 \cdot 47} \\ &= \frac{2635}{7567} = 0,348\ldots, \quad \text{d.h. sie beträgt 34,8\%.} \end{aligned}$$

6. Aufgabe (18 Punkte)
Ich schlage Ihnen das folgende Glücksspiel vor: Sie würfeln mit einem Würfel und ich würfle auch mit einem Würfel. Wenn die Summe der zwei Augenzahlen nicht durch 3 teilbar ist, so erhalten Sie von mir diese Summe. Wenn die Summe der zwei Augenzahlen durch 3 teilbar ist, so erhalte ich von Ihnen das Doppelte dieser Summe. (In diesem Fall verlieren Sie die doppelte Summe, d.h. Ihr Gewinn ist in diesem Fall negativ.) Die Zufallsvariable X beschreibe Ihren Gewinn bei diesem Spiel. Bestimmen Sie den zugrunde liegenden Ergebnisraum Ω, den Wertebereich $X(\Omega)$, die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ für alle $k \in X(\Omega)$ sowie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$. Zu wessen Gunsten ist dieses Spiel oder ist es ein faires Spiel?

Es gilt $\Omega = \{(m, n) : m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ und für $\omega = (m, n) \in \Omega$ gilt $X(\omega) = m+n$, falls $m+n$ nicht durch 3 teilbar ist, bzw. $X(\omega) = -2(m+n)$, falls $m+n$ durch 3 teilbar ist, und somit also $X(\Omega) = \{-24, -18, -12, -6, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$. Wenn man zählt, wie oft jeder dieser Werte aus $X(\Omega)$ angenommen wird, so findet man die folgenden Wahrscheinlichkeiten

k	-24	-18	-12	-6	2	4	5	7	8	10	11
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$
k^2	576	324	144	36	4	16	25	49	64	100	121

und hiermit dann

$$E(X) = \sum\nolimits_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$$
$$= \frac{-24\cdot 1 - 18\cdot 4 - 12\cdot 5 - 6\cdot 2 + 2\cdot 1 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 7\cdot 6 + 8\cdot 5 + 10\cdot 3 + 11\cdot 2}{36}$$
$$= \frac{-24 - 72 - 60 - 12 + 2 + 12 + 20 + 42 + 40 + 30 + 22}{36} = \frac{-168+168}{36} = 0 \quad \text{sowie}$$
$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = E(X^2) = \sum\nolimits_{k\in X(\Omega)} k^2 P(X=k)$$
$$= \frac{576\cdot 1 + 324\cdot 4 + 144\cdot 5 + 36\cdot 2 + 4\cdot 1 + 16\cdot 3 + 25\cdot 4 + 49\cdot 6 + 64\cdot 5 + 100\cdot 3 + 121\cdot 2}{36}$$
$$= \frac{576 + 1296 + 720 + 72 + 4 + 48 + 100 + 294 + 320 + 300 + 242}{36} = \frac{3972}{36} = \frac{331}{3}\,.$$

Das Spiel ist fair, da $E(X) = 0$.

7. Aufgabe (11+16 Punkte)
Finden Sie explizite Lösungsformeln für x_n, wenn x_n durch die folgenden Rekursionen definiert wird:

a) $x_0 = 3$, $x_1 = 30$ und $x_n = 18x_{n-1} - 81x_{n-2}$ für $n \geq 2$
Das zugehörige charakteristische Polynom $x^2 - 18x + 81 = (x-9)^2$ hat die doppelte Nullstelle $x = 9$. Die allgemeine Lösung der Rekursion $x_n = 18x_{n-1} - 81x_{n-2}$ für $n \geq 2$ hat dementsprechend die Form $x_n = (a + b\,n)9^n$ für $n \geq 0$. Im Fall der Anfangbedingungen $x_0 = 3$ und $x_1 = 30$, d.h. $a = 3$ und $9(a+b) = 30$, gilt dabei dann $a = 3$ und $b = \frac{1}{3}$. Die Lösung lautet somit $x_n = \big(3 + \frac{1}{3}n\big)9^n$ für $n \geq 0$.
Verifikation der Lösung:
Für $n = 0$ gilt $x_0 = \big(3 + \frac{1}{3}0\big)9^0 = 3$, für $n = 1$ gilt $x_0 = \big(3 + \frac{1}{3}1\big)9^1 = 30$, und es gilt
$$\begin{aligned} 18x_{n-1} - 81x_{n-2} &= 18\big(3 + \tfrac{1}{3}(n-1)\big)9^{n-1} - 81\big(3 + \tfrac{1}{3}(n-2)\big)9^{n-2} \\ &= 2\big(3 + \tfrac{1}{3}(n-1)\big)9^n - \big(3 + \tfrac{1}{3}(n-2)\big)9^n = \big(3 + \tfrac{1}{3}n\big)9^n = x_n\,. \end{aligned}$$

b) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 24$ und $x_n = 4x_{n-1} + 20x_{n-2} - 48x_{n-3}$ für $n \geq 3$
Das zugehörige charakteristische Polynom $x^3 - 4x^2 - 20x + 48$ hat in $x = 2$ eine Nullstelle und dann die Faktorisierung $x^3 - 4x^2 - 20x + 48 = (x-2)(x^2 - 2x - 24) = (x-2)(x+4)(x-6)$. Für die Rekursion $x_n = 4x_{n-1} + 20x_{n-2} - 48x_{n-3}$ für $n \geq 3$ hat die allgemeine Lösung folglich die Form $x_n = a\cdot 6^n + b\,(-4)^n + c\cdot 2^n$ für $n \geq 0$. Im Fall der Anfangbedingungen $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ und $x_2 = 24$, d.h. $a + b + c = 1$, $6a - 4b + 2c = 2$ und $36a + 16b + 4c = 24$, d.h. $a + b + c = 1$, $3a - 2b + c = 1$ und $9a + 4b + c = 6$, d.h. $a + b + c = 1$, $2a - 3b = 0$ und $8a + 3b = 5$, d.h. $a + b + c = 1$, $2a - 3b = 0$ und $10a = 5$, gilt dabei dann $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ und $c = \frac{1}{6}$. Die Lösung lautet somit $x_n = \frac{1}{2}\cdot 6^n + \frac{1}{3}(-4)^n + \frac{1}{6}\cdot 2^n = \frac{1}{6}\cdot 2^n\big(3^{n+1} - (-2)^{n+1} + 1\big)$ für $n \geq 0$.
Verifikation der Lösung:
Für $n = 0$ erhält man $x_0 = \frac{1}{6}\cdot 2^0\big(3^{0+1} - (-2)^{0+1} + 1\big) = \frac{1}{6}(3 + 2 + 1) = 1$, für $n = 0$ erhält man $x_1 = \frac{1}{6}\cdot 2^1\big(3^{1+1} - (-2)^{1+1} + 1\big) = \frac{1}{3}(9 - 4 + 1) = 2$, für $n = 2$ erhält man $x_2 = \frac{1}{6}\cdot 2^2\big(3^{2+1} - (-2)^{2+1} + 1\big) = \frac{2}{3}(27 + 8 + 1) = 24$ und es gilt
$$\begin{aligned} &4x_{n-1} + 20x_{n-2} - 48x_{n-3} \\ &= \tfrac{4}{6}\cdot 2^{n-1}\big(3^n - (-2)^n + 1\big) + \tfrac{20}{6}\cdot 2^{n-2}\big(3^{n-1} - (-2)^{n-1} + 1\big) - \tfrac{48}{6}\cdot 2^{n-3}\big(3^{n-2} - (-2)^{n-2} + 1\big) \\ &= \tfrac{2}{6}\cdot 2^n\big(3^n - (-2)^n + 1\big) + \tfrac{5}{6}\cdot 2^n\big(3^{n-1} - (-2)^{n-1} + 1\big) - \tfrac{6}{6}\cdot 2^n\big(3^{n-2} - (-2)^{n-2} + 1\big) \\ &= \tfrac{1}{6}\cdot 2^n\Big(\big(2\cdot 3 + 5 - \tfrac{6}{3}\big)3^{n-1} - \big(2(-2) + 5 - \tfrac{6}{(-2)}\big)(-2)^{n-1} + \big(2 + 5 - 6\big)\Big) \\ &= \tfrac{1}{6}\cdot 2^n\big(9\cdot 3^{n-1} - 4(-2)^{n-1} + 1\big) = \tfrac{1}{6}\cdot 2^n\big(3^{n+1} - (-2)^{n+1} + 1\big) = x_n\,. \end{aligned}$$