KLAUSUR

Fourier- und Laplacetheorie

15.2.2000

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 11 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei die Funktion:
$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & , \quad 0 \le t \le \pi \\ 0 & , \quad \pi \le t \le 2\pi \,. \end{cases}$$
Man setze f direkt 2π-periodisch fort und berechne die Fourier-Koef£zienten a_j und b_j. Hinweis: Man benutze die Fourierreihe
$$|\sin(t)| = \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4\,j^2)\,\pi} \cos(2\,j\,t) \right) .$$
(4P)

2. Man berechne die Faltung $(f * g)(t)$ auf $\mathbb{R}$ der Funktionen:
$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases} \quad , \quad g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$
und gebe anschließend die Fouriertransformierte der Faltung an. Hinweis: Man gehe aus von der Fouriertransformierten
$$\mathcal{F}(h(t))(\omega) = \frac{1}{2\,\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) ,$$
des Rechteckimpulses
$$h(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{1}{2}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$
und benutze den Satz über die Differenziation im Zeitbereich.
(8P)

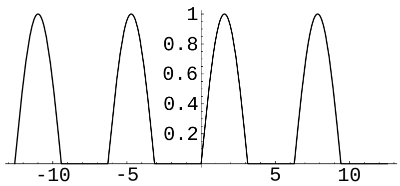
3. Unter Verwendung von: $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ berechne man die Laplacetransformierte von
$$f(t) = \sqrt{t}\,.$$
(6P)

4. Man löse folgendes Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplacetransformation:
$$y'' - 2\,y' + 2\,y = 5\,t\,, \quad y(0) = 0\,, y'(0) = 2\,.$$
(6P)

Lösungen

1.) Die Funktion f kann wie folgt beschrieben werden:

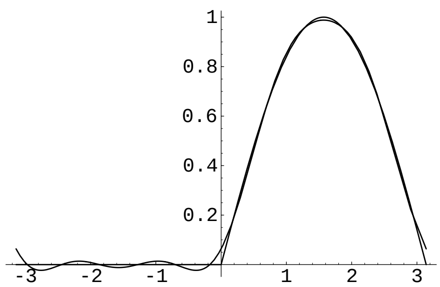
$$f(t) = \frac{\sin(t) + |\sin(t)|}{2} \,.$$



Die Funktion
$f(t) = \sin(t)\,, 0 \leq t \leq \pi,$
$f(t) = 0\,, \pi \leq t \leq 2\,\pi,$
und ihre direkte periodische Fortsetzung

Die Fourier-Koef£zienten von $f(t)$ können nun als Summe der Koe£zienten von $\frac{1}{2}\sin(t)$ und $\frac{1}{2}|\sin(t)|$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} f(t) \;&\sim\; \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4\,j^2)\,\pi}\,\cos(2\,j\,t)\right) \\ &\sim\; \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4\,j^2)}\,\cos(2\,j\,t)\,. \end{aligned}$$



Die Funktion
$f(t) = \sin(t)\,, 0 \leq t \leq \pi,$
$f(t) = 0\,, \pi \leq t \leq 2\,\pi,$
und die Teilsumme ihrer Fourierreihe $S_f(n, 5)$ gezeichnet im Intervall $[-\pi, \pi]$

2.) Bei der Berechnung der Faltung unterscheiden wir vier Intervalle: $t \leq 0$, $0 < t \leq 1$, $1 < t \leq 2$ und $t > 2$. Im ersten und im vierten Intervall liegt sowohl der Schnittpunkt der Funktionen $\tilde{f}(\tau) = 1$ und $\tilde{g}(\tau) = t - \tau$ als auch der Schnittpunkt von $\tilde{g}(\tau) = t - \tau$ mit der τ-Achse außerhalb des Intervalls $0 < \tau < 1$. Die Intervalle, in denen $f(\tau)$ und $g(t-\tau)$ beide nicht verschwinden sind disjunkt. Das Faltungsintegral ergibt Null. Im zweiten Intervall liegt der Schnittpunkt der Funktionen $\tilde{f}(\tau) = 1$ und $\tilde{g}(\tau) = t - \tau$ außerhalb des Intervalls $0 < \tau < 1$, aber der Schnittpunkt von $\tilde{g}(\tau) = t - \tau$ mit der τ-Achse liegt bei $\tau = t$ innerhalb des Intervalls $0 < \tau < 1$. Das Faltungsintegral ergibt:

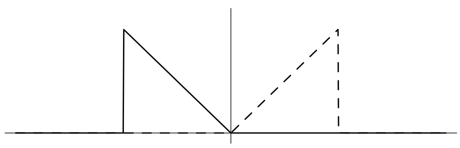
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau &= \int_{0}^{t} (t-\tau)\, d\tau \\
&= \left(t\,\tau - \frac{\tau^2}{2} \right) \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&= \frac{t^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

Im dritten Intervall liegt der Schnittpunkt der Funktionen $\tilde{f}(\tau) = 1$ und $\tilde{g}(\tau) = t - \tau$ bei $\tau = t - 1$ innerhalb des Intervalls $0 < \tau < 1$, aber der Schnittpunkt von $\tilde{f}(\tau) = 1$ und $\tilde{g}(\tau) = t - \tau$ liegt außerhalb des Intervalls $0 < \tau < 1$. Das Faltungsintegral ergibt:

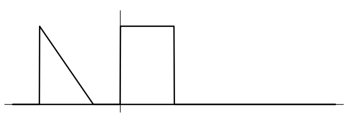
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau &= \int_{t-1}^{1} (t-\tau)\, d\tau \\
&= \left(t\,\tau - \frac{\tau^2}{2} \right) \Bigg|_{\tau=t-1}^{\tau=1} \\
&= t - \frac{t^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

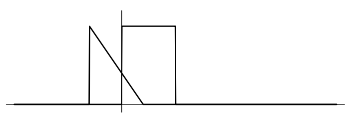
Insgesamt ergibt sich:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq 0\,, \\ \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{t^2}{2} & 0 < t \leq 1\,, \\ \frac{1}{2\,\pi}\left(t - \frac{t^2}{2}\right) & 1 < t \leq 2\,, \\ 0, & 2 < t < \infty\,, \end{cases}$$

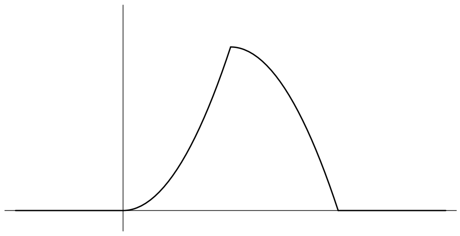


Die Funktionen $g(\tau)$ (gestrichelt) und $g(-\tau)$ über der τ-Achse gezeichnet.





Die Funktionen $f(\tau)$, $g(t-\tau)$ für verschiedene t über der τ-Achse gezeichnet.



Die Faltung der Funktionen f und g

Mit Hilfe der Verschiebung im Zeitbereich bekommt man die Fouriertransformierte von f. Ist h ein Rechteckimpuls

$$h(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

mit der Fouriertransformierten

$$\mathcal{F}(h(t))(\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)\ ,$$

so besitzt $f(t) = h\left(t - \dfrac{1}{2}\right)$ die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\,e^{-\frac{\omega}{2}\,i}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)\ .$$

Wir können die Hilfsfunktion h wieder mit der Heavisideschen Sprungfunktion schreiben als:

$$h(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) + u\left(t - \frac{1}{2}\right)\ .$$

Nach dem Differenziationssatz im Zeitbereich besteht zwischen den Fouriertransformierten von f und g folgende Beziehung:

$$\mathcal{F}(f(t)) = \omega\, i\, \mathcal{F}(g(t)) + \frac{1}{2\,\pi}\,e^{-\omega\, i}\,.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g(t)) &= \frac{1}{\omega\, i}\left(\mathcal{F}(f(t)) - \frac{1}{2\,\pi}\, e^{-\omega\, i}\right)\\ &= \frac{e^{-\frac{\omega}{2}\, i}}{2\,\pi\,\omega\, i}\left(\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) - e^{-\frac{\omega}{2}\, i}\right)\,.\end{aligned}$$

Die Fouriertransformierte der Faltung lautet dann:

$$\mathcal{F}((f*g)(t))(\omega) = -\frac{i}{4\,\pi^2}\,\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)\,\frac{e^{-\omega\, i}}{\omega}\,\left(\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) - e^{-\frac{\omega}{2}\, i}\right)\,.$$

3.) Die Funktion $f(t)$ ist von exponentieller Ordnung. Für relles $s > 0$ bekommen wir zunächst:

$$\begin{aligned}L(s) &= \int_0^\infty e^{-s\,t}\,\sqrt{t}\,dt\\ &= \frac{1}{s\,\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-\tau}\,\sqrt{\tau}\,d\tau\\ &= \frac{1}{s\,\sqrt{s}}\int_0^\infty 2\,\sigma\,e^{-\sigma^2}\,\sigma\,d\sigma\\ &= \frac{1}{s\,\sqrt{s}}\,e^{-\sigma^2}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s\,\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-\sigma^2}\,d\sigma\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s\,\sqrt{s}}\,.\end{aligned}$$

Damit konvergiert das Laplace-Integral auch für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 0$ und diesselbe Rechnung liefert die Behauptung. Für $s = 0$ gilt:

$$\int_0^{t_0}\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\,t_0\,\sqrt{t_0}\,.$$

Offenbar konvergiert das Laplace-Integral für $s = 0$ nicht. Damit stellt $\Re(s) > 0$ die Konvergenzhalbebene dar.

4.) Wir setzen $\mathcal{L}(y(t))(s) = Y(s)$ und bekommen für die Ableitungen:

$$\mathcal{L}(y'(t))(s) = s\,Y(s)\,,$$

$$\mathcal{L}(y''(t))(s) = s^2\,Y(s) - 2\,.$$

Mit der Korrespondenz

$$\mathcal{L}\left(e^t\right)(s) = \frac{1}{s^2}\,, \quad \Re(s) > 0\,.$$

können wir die Differenzialgleichung in den Bildraum übertragen:

$$s^2\,Y(s) - 2 - 2\,s\,Y(s) + 2\,Y(s) = \frac{5}{s^2}$$

bzw.

$$(s^2 - 2\,s + 2)\,Y(s) = \frac{5}{s^2} + 2\,.$$

Das charakteristische Polynom

$$P(s) = s^2 - 2\,s + 2$$

besitzt die Nullstellen: $1 - i$ und $1 + i$, sodass für die Laplacetransformierte der gesuchten Lösung gelten muss:

$$Y(s) = \frac{\frac{5}{s^2} + 2}{s^2 - 2\,s + 2} = \frac{2\,s^2 + 5}{s^2\,(s^2 - 2\,s + 2)}\,, \quad \Re(s) > 1\,.$$

Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\frac{2\,s^2 + 5}{s^2\,(s^2 - 2\,s + 2)} = \frac{\frac{5}{2}}{s} + \frac{\frac{5}{2}}{s^2} + \frac{-\frac{5}{4} + i}{s - (1 - i)} + \frac{-\frac{5}{4} - i}{s - (1 + i)}\,.$$

Hieraus erhält man sofort die Rücktransformierte:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\,t + \left(-\frac{5}{4} + i\right)\,e^{(1-i)\,t} + \left(-\frac{5}{4} - i\right)\,e^{(1+i)\,t} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\,t - \frac{5}{2}\,e^t\,\cos(t) + 2\,e^t\,\sin(t)\,. \end{aligned}$$

Während man sich hier auf die Korrespondenz

$$\mathcal{L}(t^n\, e^{a\,t})(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

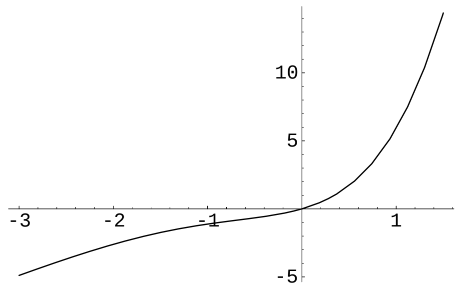
stützt, kann man auch durch andere Zerlegungen zum Ziel kommen:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2}{s^2 - 2\,s + 2} + \frac{5}{s^2\,(s^2 - 2\,s + 2)} \\
&= \frac{2}{(s-1)^2+1} + 5\,\left(\frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2} + \frac{-\frac{1}{2}\,s + \frac{1}{2}}{(s-1)^2+1}\right) \\
&= \frac{5}{2}\,\frac{1}{s} + \frac{5}{2}\,\frac{1}{s^2} - \frac{5}{2}\,\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + 2\,\frac{1}{(s-1)^2+1}\,.
\end{aligned}$$

Mit den Korrespondenzen

$$\mathcal{L}(\cos(t))(s) = \frac{s}{s^2+1}\,, \quad \mathcal{L}(\sin(t))(s) = \frac{1}{s^2+1}\,,$$

und dem Verschiebungssatz im Bildbereich erhalten wir wieder die obige Rücktransformierte.



Die Lösung des Anfangswertproblems
$y'' - 2\,y' + 2\,y = 5\,t$
$y(0) = 0\,, y'(0) = 2$