KLAUSUR

Fourier- und Laplacetheorie

16.9.2003

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 10 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Die Parseval-Gleichung lautet:
$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T |f(t)|^2\,dt = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(|a_j|^2 + |b_j|^2)\,.$$
Die Entwicklung der Funktion $f(t) = t^2$, $-\pi \le t \le \pi$, lautet:
$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\,\frac{4}{j^2}\,\cos(j\,t)\,.$$
Man berechne daraus die Reihe
$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^4}\,.$$
(4P)

2. Der Rechteckimpuls
$$g(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t \le 1\,, \\ 0, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$
besitzt die Fouriertransformierte
$$\mathcal{F}(g(t))(\omega) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(\omega)}{\omega}\,.$$
Man berechne die Fouriertransformierte des Impulses:
$$f(t) = \begin{cases} 3\,t, & -1 \le t \le 1\,, \\ 0, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$
(4P)

3. Das Produkt einer Funktion f mit einer Distribution T wird erklärt durch: $(fT)(\phi) = T(f(\phi))$. Die Ableitung einer Distribution T wird erklärt durch: $(T)'(\phi) = -T(\phi)$. Man berechne das Produkt $f(T_\delta)'$ und zeige:
$$f(T_\delta)' = f(0)\,(T_\delta)' - f'(0)\,T_\delta\,.$$
(6P)

4. Mithilfe der z-Transformation löse man die Differenzengleichung:
$$y_{n+2} - 2\,y_{n+1} - y_n = 0\,,\quad y_0 = 1\,, y_1 = 2\,.$$
(6P)

Lösungen

1.) Wir berechnen das Integral ($T = 2\,\pi$):

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T |f(t)|^2 = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^4\,dt = \frac{\pi^4}{5}\,.$$

Für die Summe der Quadrate der Fourierkoeffizienten erhält man:

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{j=1}^{\infty}(|a_j|^2 + |b_j|^2) = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{16}{j^4}\,.$$

Gleichsetzen ergibt:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

2.) Offenbar gilt:

$$f(t) = 3\,t\,g(t)\,.$$

Differenziation im Frequenzbereich liefert zunächst für $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t))(\omega) &= 3\,\mathcal{F}(t\,g(t)(\omega) = 3\,i\,\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}(g(t))(\omega)\\ &= 3\,i\,\frac{\omega\,\cos(\omega) - \sin(\omega)}{\pi\,\omega^2}\,.\end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt dies auch für $\omega = 0$.

3.) Es gilt nach Definition:

$$T'_\delta(\phi) = -T_\delta(\phi') = -\phi'(0)\,.$$

Multiplikation ergibt:

$$f\,T'_\delta(\phi) = -T_\delta((f\,\phi)') - (f\,\phi)'(0) = -f(0)\,\phi'(0) - f'(0)\,\phi(0)\,.$$

Dies bedeutet:

$$f\,T'_\delta = f(0)\,T'_\delta - f'(0)\,T_\delta\,.$$

4.) Sei $\mathcal{Z}(y_n)(z) = Y(z)$ Mit dem Verschiebungssatz folgt:

$$\mathcal{Z}(y_{n+1})(z) = z\,(Y(z) - 1) \quad \text{und} \quad \mathcal{Z}(y_{n+2})(z) = z^2\left(Y(z) - 1 - 2\,\frac{1}{z}\right)\,.$$

Einsetzen in die Differenzengleichung liefert:

$$z^2\,Y(z) - z^2 - 2\,z - 2\,(z\,Y(z) - z) - Y(z) = 0$$

bzw.

$$Y(z) = z^2\,\frac{1}{z^2 - 2\,z - 1} = z^2\,\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\,\frac{1}{z - z_1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,\frac{1}{z - z_2}\right)$$

mit

$$z_1 = 1 - \sqrt{2}\,, \quad z_2 = 1 + \sqrt{2}\,.$$

Berücksichtigen wir nun, dass ein einfacher Pol $\frac{1}{z-a}$ die Rücktransformierte $f_n = a^{n-1}$, $n \geq 1$, $f_0 = 0$, besitzt, so ergibt sich die Rücktransformierte

$$h_n = -\frac{\sqrt{2}}{4}\,z_1^{n-1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,z_2^{n-1}\,,$$

$h_0 = 0$. Mit dem Verschiebungssatz erhalten wir:

$$\mathcal{Z}(h_{n+1})(z) = z\,\frac{1}{z^2 - 2\,z - 1} - h_0\,z = \frac{z}{z^2 - 2\,z - 1}$$

und

$$\mathcal{Z}(h_{n+2})(z) = z^2\,\frac{z}{z^2 - 2\,z - 1} - h_0\,z^2 - h_1\,z = \frac{z^2}{z^2 - 2\,z - 1}\,.$$

Also:

$$y_n = -\frac{\sqrt{2}}{4}\,z_1^{n+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,z_2^{n+1}\,, n \geq 0$$