KLAUSUR

Fourier- und Laplacetheorie

13.9.2004

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 10 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei die Spaltfunktion: $\mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$. Mit der Beziehung $\dfrac{\sin(\omega)}{\omega} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{i\,\omega\,t}\,dt$ und dem Fourier-Integraltheorem zeige man:

$$\mathcal{F}(\mathrm{sinc}(t))(\omega) = \frac{1}{2}\ (u(\omega+1) - u(\omega-1))\ .$$

   (Dabei ist $u(t)$ die Heaviside-Funktion $u(t) = 1, t \geq 0$, $u(t) = 0, t < 0$).
   (8P)

2. Mit der Reihenentwicklung des Arcustangens

$$\arctan(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{2\,\nu+1}\, z^{2\,\nu+1}\ , \quad |z| < 1\ ,$$

   berechne man die Rücktransformierte unter der Laplacetransformation der Funktion

$$L(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)\ , \quad \Re(s) > 1\ .$$

   (6P)

3. Die Faltung zweier (kausaler) Folgen

$$y_n = h_n * u_n = \sum_{\nu=0}^{n} h_{\nu}\, u_{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} h_{n-\nu}\, u_{\nu}$$

   soll als Matrizenprodukt (mit einer unendlichen Matrix H) geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{pmatrix}\ .$$

   Sei $h_n = 0$ und $u_n = 0$ für $n \geq 2$. Wie lautet die Folge y_n und ihre z-Transformierte? Unter welcher Zusatzbedingung ist H invertierbar?
   (6P)

Lösungen

1.) Sei $\mathcal{F}(\phi(t))(\omega) = \Phi(\omega)$ und $f(t) = \frac{1}{2}\,(u(t+1) - u(t-1))$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(T_{\text{sinc}})(\phi) &= T_{\text{sinc}}(\mathcal{F}(\phi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\omega)\,\Phi(\omega)\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{i\,\omega\,t}\,dt\right)\,\Phi(\omega)\,d\omega = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega\,t}\,\Phi(\omega)\,d\omega\right)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi(t)\,dt = T_f(\phi)\,.
\end{aligned}$$

Oder:

$$\text{sinc}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\,\omega\,t}\,dt = 2\,\pi\,\mathcal{F}(f(t))(-\omega)\,,$$

bzw. $(\text{sinc}(\omega) = \text{sinc}(-\omega))$

$$2\,\pi\,\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \text{sinc}(\omega)\,, \quad \mathcal{F}(f(\omega))(t) = \frac{1}{2\,\pi}\,\text{sinc}(t)\,.$$

Integraltheorem und Symmetrie:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f(\omega))(t)\,e^{i\,\omega\,t}\,dt = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t)e^{i\,\omega\,t}\,dt = \mathcal{F}(\text{sinc})(\omega)\,.$$

2.)

$$\arctan(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{2\,\nu+1}\,z^{2\,\nu+1}\,, |z| < 1 \Longrightarrow L(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\,\nu+1)}\,\frac{1}{s^{2\,\nu+1}}\,, |s| > 1\,,$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)(s) = \mathcal{L}\left(\text{sinc}(t)\right)(s) = \mathcal{L}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\,\nu+1)!}\,t^{2\,\nu}\right)(s) = L(s)\,.$$

3.)

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 & 0 & \cdots & & & & \\ h_1 & h_0 & 0 & \cdots & & & \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & & \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & \\ & & & & & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

$h_0 \neq 0 \Longleftrightarrow H$ invertierbar.
$h_n = 0, u_n = 0\,, n \geq 2 \Longrightarrow y_0 = h_0 u_0\,, y_1 = h_1 u_0 + h_0 u_1\,, y_2 = h_1 u_1\,, y_n = 0\,, n \geq 3$.
$\mathcal{Z}(y_n)(z) = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2}$.