KLAUSUR

Fourier- und Laplacetheorie

7.9.2005

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 11 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei die Funktion:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \geq 0\,, \\ -1 & , \quad t < 0\,. \end{cases}$$

   Wir ordnen f eine Distribution T_f zu, die auf Testfunktionen ϕ wirkt durch:

$$T_f(\phi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi(t)\,dt\,.$$

   Wie lautet die Ableitung der Distribution T_f ?
   Hinweis: $T_f'(\phi) = -T_f(\phi')$. Spalten Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi'(t)\,dt$ auf und benutzen Sie $\phi(\pm\infty) = 0$. **(6P)**

2. Zeigen Sie mithilfe von Eigenschaften der Fouriertransformation oder durch Nachrechnen

$$\overline{\mathcal{F}(\overline{f(t+a)})(\omega)} = \mathcal{F}(f(t))(-\omega)\,e^{-i\,a\,\omega}\,.$$

   (4P)
   Zeigen Sie anschließend mit der Parseval-Plancherel-Gleichung

$$\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f(t))(\omega)\,\overline{\mathcal{F}(g(t))(\omega)}\,d\omega$$

   für reellwertige Funktionen f:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,f(t+a)\,dt = 2\,\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f(t))(\omega)|^2\,e^{-i\,a\,\omega}\,d\omega\,.$$

   (Definition der FT: $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\,\omega\,t}\,dt\,.$) **(4P)**

3. Mit der Laplace-Transformation löse man das (kontinuierliche) Anfangswertproblem:

$$y''(t) - 2\,y'(t) - y(t) = 0\,,\quad y(0) = 0\,, y'(0) = -1\,.$$

   Mit der z-Transformation löse man das (diskrete) Anfangswertproblem:

$$y_{n+2} - 2\,y_{n+1} - y_n = 0\,,\quad y_0 = 0\,, y_1 = -1\,.$$

   (8P)

Lösungen

1.) Nach Definition gilt:

$$T_f'(\phi) = -T_f(\phi')\,.$$

Nun formen wir um:

$$\begin{aligned} T_f'(\phi) &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi'(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \phi'(t)\,dt - \int_{0}^{\infty} \phi'(t)\,dt \\ &= \phi(0) - (-\phi(0)) = 2\,\phi(0) = 2\,T_\delta(\phi)\,. \end{aligned}$$

2.) Der Konjugationssatz (FTransformierte der konjugiert komplexen Funktion) und der Verschiebungssatz (im Zeitbereich) ergeben:

$$\overline{\mathcal{F}(\overline{f(t+a)})(\omega)} = \mathcal{F}(f(t+a))(-\omega) = \mathcal{F}(f(t))(-\omega)\,e^{-i\,a\,\omega}\,.$$

Nach der Parseval-Plancherel-Gleichung gilt (f reellwertig):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,f(t+a)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{f(t+a)}\,dt \\ &= 2\,\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f(t))(\omega)\,\overline{\mathcal{F}(f(t+a))(\omega)}\,d\omega \\ &= 2\,\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f(t))(\omega)\,\overline{\mathcal{F}(f(t))(\omega)\,e^{i\,a\,\omega}}\,d\omega \\ &= 2\,\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f(t))(\omega)|^2\,e^{-i\,a\,\omega}\,d\omega\,. \end{aligned}$$

3.) Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y(t))(s) &= Y(s)\,, \\ \mathcal{L}(y'(t))(s) &= s\,Y(s) - y(0) = s\,Y(s)\,, \\ \mathcal{L}(y''(t))(s) &= s^2\,Y(s) - y(0)\,s - y'(0) = s^2\,Y(s) + 1\,. \end{aligned}$$

Die Differenzialgleichung lautet dann im Bildbereich:

$$Y(s) = -\frac{1}{s^2 - 2\,s - 1}\,.$$

Partialbruchzerlegung ergibt:

$$Y(s) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{s-(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{s-(1-\sqrt{2})}\,.$$

Rücktransformieren liefert die Lösung:

$$y(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,e^{(1+\sqrt{2})\,t} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,e^{(1-\sqrt{2})\,t}\,.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(y_n)(z) &= Y(z)\,,\\
\mathcal{Z}(y_{n+1})(z) &= z\,Y(z) - y_0\,z = z\,Y(z)\,,\\
\mathcal{Z}(y_{n+2})(z) &= z^2\,Y(z) - y_0\,z^2 - y_1\,z = z^2\,Y(z) + z\,.
\end{aligned}$$

Die Differenzengleichung lautet dann im Bildbereich:

$$Y(z) = -\frac{z}{z^2 - 2\,z - 1}\,.$$

Partialbruchzerlegung ergibt:

$$Y(z) = -\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{s-(1+\sqrt{2})} + \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{s-(1-\sqrt{2})}\,.$$

Rücktransformieren liefert die Lösung:

$$y_n = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right)\,.$$

Hierbei benutzt man, dass für die Folge

$$f_n = \begin{cases} 0 & , \quad n = 0\,,\\ a^{n-1} & , \quad n \geq 1\,, \end{cases}$$

gilt:

$$\mathcal{Z}(f_n)(z) = \frac{1}{z-a}\,, \quad |a| < |z|\,.$$