KLAUSUR

Fourier- und Laplacetheorie (E)

12.3.2007

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Versuch–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Mithilfe der Parsevalschen Gleichung und der Fouriertransformierten des Rechteckimpulses
$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$
zeige man:
$$\int\limits_0^\infty \frac{(\sin(\omega))^2}{\omega^2}\, d\omega = \frac{\pi}{2}\,.$$
Parseval-Gleichung:
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f(t))(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt\,.$$
(8P)

2. Gegeben sei die (einseitige) z-Transformierte
$$\frac{1}{(z-a)^2}\,, \quad |a| < |z|$$
Berechnen Sie die Urbildfolge $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.
(8P)

3. Berechnen Sie die Laplacetransformierte $\mathcal{L}(f_n(t))(s)$ der Impulse
$$f_n(t) = \begin{cases} n\,, & 0 \leq t < \frac{1}{n}\,, \\ \\ 0\,, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$
und den Grenzwert:
$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(f_n(t))(s) = 1 = \mathcal{L}(\delta(t))(s)\,.$$
(8P)

Lösungen:

1.) Das Integral über den Rechteckimpuls ergibt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-1}^{1} dt = 2\,.$$

Der Rechteckimpuls besitzt die Fouriertransformierte:

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\omega)}{\omega}\,.$$

Nach der Parsevalschen Gleichung gilt dann:

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin(\omega))^2}{\omega^2} \, d\omega = \frac{1}{2\,\pi} 2 \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin(\omega))^2}{\omega^2} \, d\omega = \pi$$

und somit

$$\int_{0}^{\infty} \frac{(\sin(\omega))^2}{\omega^2} \, d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin(\omega))^2}{\omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2}\,.$$

2.) In dem Gebiet $|a| < |z|$ entwickeln wir in eine Laurentreihe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-a)^2} &= \frac{1}{z-a} \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} \\ &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a^n \, z^{-n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\, a^{n-2} \, z^{-n}\,. \end{aligned}$$

Hieraus bekommen wir folgende Urbildfolge:

$$f_n = \begin{cases} 0 & , \quad n < 2\,, \\ (n-1)\, a^{n-2} & , \quad n \geq 2\,. \end{cases}$$

3.) Die Laplacetransformierte von f_n ergibt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_n(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-s\,t}\, f_n(t)\, dt = n \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-s\,t}\, dt \\ &= \frac{1 - e^{-\frac{1}{n}\,s}}{\frac{1}{n}\,s}\,. \end{aligned}$$

Hieraus entnimmt man mit der Regel von de l'Hospital den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(f_n(t))(s) = \lim_{h\to 0} \frac{1 - e^{-h}}{h} = 1\,.$$