KLAUSUR

Fourier- und Laplacetheorie (E)

10.9.2008

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Versuch–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktionen:

$$f(t) = e^{-|t|} \quad \text{und} \quad g(t) = \cos(t)\, e^{-|t|}\,.$$

(8P)

2. Gegeben sei die Knickfunktion:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0\,, \\ t & , \quad t \geq 0\,. \end{cases}$$

sowie die Heavisidesche Sprungfunktion

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0\,, \\ 1 & , \quad t \geq 0\,, \end{cases}$$

Betrachten Sie die zugeordneten regulären Distributionen T_f bzw. T_u und berechnen Sie jeweils ihre Ableitung.
(8P)

3. Berechnen die z-Transformierte der Folge:

$$f_n = \frac{1}{n!}\,, \quad n \geq 0\,.$$

Hinweis: Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion benutzen.
(8P)

Lösungen:

1.) Aufspalten des Integrals ergibt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\, e^{-\omega\, i\, t}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{(1-\omega\, i)\, t}\, dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(1+\omega\, i)\, t}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\; \frac{e^{(1-\omega\, i)\, t}}{1-\omega\, i}\Bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2\pi}\; \frac{e^{-(1+\omega\, i)\, t}}{1+\omega\, i}\Bigg|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2\pi}\, \frac{1}{1-\omega\, i} + \frac{1}{2\pi}\, \frac{1}{1+\omega\, i} \\
&= \frac{1}{\pi}\, \frac{1}{1+\omega^2}\,.
\end{aligned}$$

Mit der Linearität und dem Verschiebungssatz berechnen wir die Fouriertransformierte der Funktion:

$$g(t) = \cos(t)\, e^{-|t|}\,.$$

Wir schreiben:

$$g(t) = \left(\frac{1}{2}\, e^{t\, i} + \frac{1}{2}\, e^{-t\, i}\right)\, e^{-|t|} = \frac{1}{2}\, e^{t\, i}\, e^{-|t|} + \frac{1}{2}\, e^{-t\, i}\, e^{-|t|}$$

und bekommen:

$$\mathcal{F}\left(g(t)\right)(\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\, \frac{1}{1+(\omega-1)^2} + \frac{1}{2\,\pi}\, \frac{1}{1+(\omega+1)^2}\,.$$

2.) Die f zugeordnete reguläre Distribution wirkt auf Testfunktionen ϕ durch:

$$T_f(\phi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \phi(t)\, dt = \int\limits_{0}^{\infty} t\, \phi(t)\, dt\,.$$

Nun berechnen wir:

$$\begin{aligned}(T_f)'(\phi) &= -T_f(\phi') = -\int\limits_0^\infty t\,\phi'(t)\,dt \\ &= -\,t\,\phi(t)\big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty \phi(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \phi(t)\,dt \\ &= \int\limits_{-\infty}^0 0\cdot\phi(t)\,dt + \int\limits_0^\infty 1\cdot\phi(t)\,dt \\ &= \int\limits_{-\infty}^\infty u(t)\,\phi(t)\,dt = T_u(\phi)\,.\end{aligned}$$

Nach Definition der Ableitung von Distributionen ergibt sich wieder:

$$\begin{aligned}(T_u)'(\phi) &= -T_u(\phi') = -\int\limits_0^\infty \phi'(t)\,dt = -\phi(t)\big|_0^\infty \\ &= \phi(0) = T_\delta(\phi)\,.\end{aligned}$$

3.) Wir benutzen die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion:

$$e^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\,z^n\,,\quad z\in\mathbb{C}\,.$$

Wenn wir z durch $\frac{1}{z}$ ersetzen, folgt hieraus

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\,z^{-n}$$

und:

$$\mathcal{Z}\left(\frac{1}{n!}\right)(z) = e^{\frac{1}{z}}\,,\quad |z|>0\,.$$